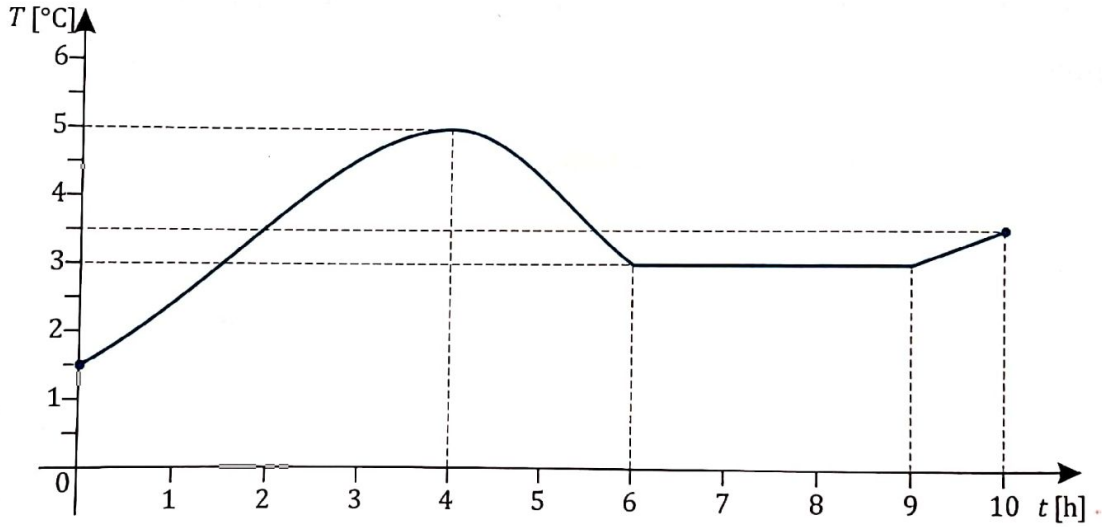
Monotoniczność funkcji

Poniższy wykres otrzymany z termografu ilustruje zmiany temperatury powietrza w pewnej miejscowości w ciągu 10 godzin.

Przeanalizujemy ten wykres i odpowiemy na następujące pytania:

1) Jak zmieniała się temperatura powietrza w ciągu pierwszych czterech godzin od rozpoczęcia pomiaru?
2) Co działo się przez następne dwie godziny?
3) Czy w siódmej, ósmej i dziewiątej godzinie pomiaru temperatura zmieniała się?
4) Jak zmieniła się temperatura w czasie ostatniej godziny pomiaru?

Oto wykres przedstawiający zmiany temperatury.



Ad 1)
W ciągu pierwszych czterech godzin temperatura rosła (wykres „wznosi się"). W chwili rozpoczęcia pomiaru temperatura wynosiła 1,5°C i wzrastała aż do poziomu 5°C.

Ad 2)
Przez następne dwie godziny temperatura malała (wykres „opada"). W tym czasie temperatura obniżyła się o 2°C do poziomu 3°C.

Ad 3)
W siódmej, ósmej i dziewiątej godzinie pomiaru temperatura była stała (wykres jest poziomy). W tym czasie temperatura miała jedną niezmieniającą się wartość równą 3°C.

Ad 4)
W ostatniej godzinie pomiaru temperatura znowu rosła i w chwili zakończenia pomiaru osiągnęła wartość 3,5°C.

Definicja 1.
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją rosnącą w zbiorze** A, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Możemy zapisać krócej:
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy funkcją rosnącą w zbiorze A, $A \subset X \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$$

Definicja 2.
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją malejącą w zbiorze** A, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Możemy zapisać krócej:
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy funkcją malejącą w zbiorze A, $A \subset X \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$$

Definicja 3.
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją stałą w zbiorze** A, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

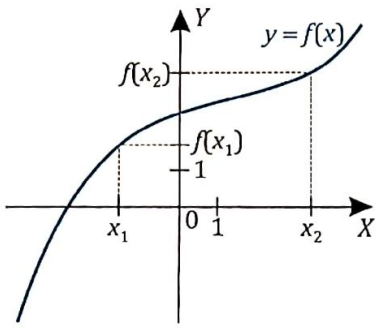
Możemy zapisać krócej:
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy funkcją stałą w zbiorze A, $A \subset X \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} f(x_1) = f(x_2)$$

- Funkcję, która jest rosnąca w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją rosnącą**.
- Funkcję, która jest malejąca w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją malejącą**.
- Funkcję, która jest stała w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją stałą**.

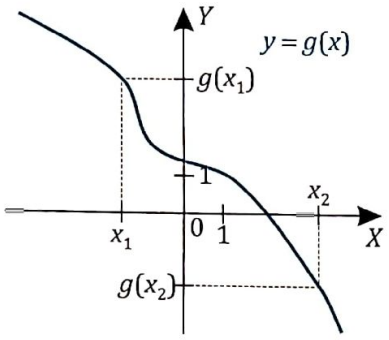
Przykład 1.

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji f, g oraz h.
Funkcja f jest rosnąca, funkcja g jest malejąca, funkcja h jest stała.



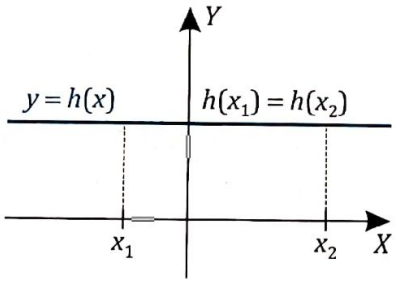
wykres rosnącej funkcji f

Na wykresie funkcji f wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_f z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$.



wykres malejącej funkcji g

Na wykresie funkcji g wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_g z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $g(x_1) > g(x_2)$.



wykres stałej funkcji h

Na wykresie funkcji h wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji pozostają stałe; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_h mamy $h(x_1) = h(x_2)$.

Oprócz funkcji rosnących i malejących wyróżnia się też funkcje niemalejące i nierosnące.

Definicja 4.

Funkcję liczbową $f\colon X \to Y$ nazywamy **funkcją niemalejącą w zbiorze A**, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Możemy zapisać krócej:

Funkcję liczbową $f\colon X \to Y$ nazywamy funkcją niemalejącą w zbiorze A, $A \subset X \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)]$$

Definicja 5.

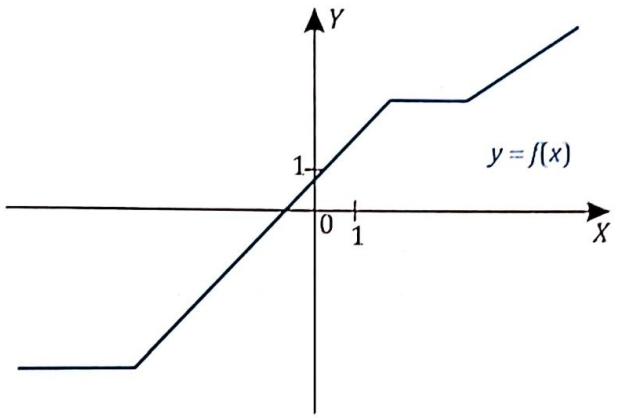
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją nierosnącą w zbiorze** A, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Możemy zapisać krócej:

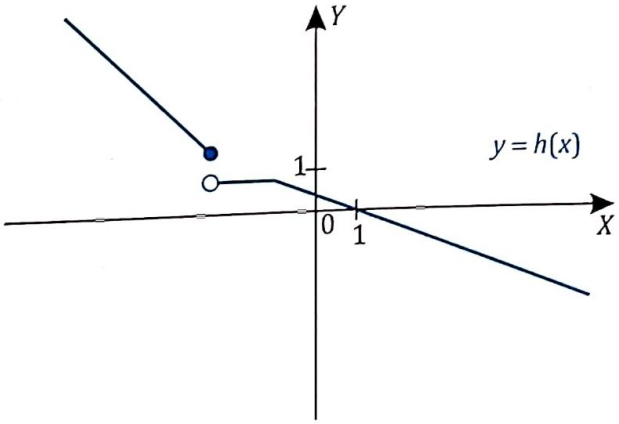
Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy funkcją nierosnącą w zbiorze A, $A \subset X \underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)]$$

Każda funkcja rosnąca jest jednocześnie funkcją niemalejącą. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji niemalejącej, która nie jest rosnąca (w pewnym przedziale jest stała).



Podobnie, każda funkcja malejąca jest jednocześnie funkcją nierosnącą. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji nierosnącej, która nie jest malejąca.



Funkcja stała jest jednocześnie nierosnąca i niemalejąca.

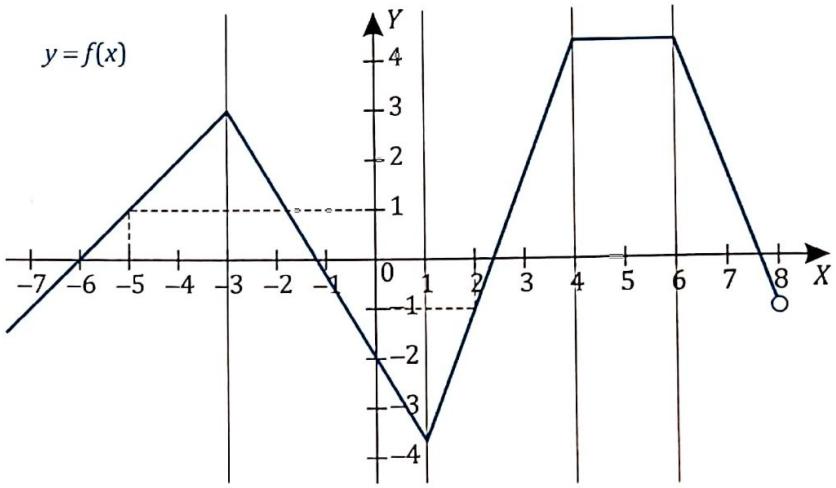
Funkcje nierosnące i niemalejące nazywamy **funkcjami monotonicznymi**.

Najczęściej spotykamy się z funkcjami, które nie są monotoniczne, to znaczy z takimi, które w pewnych przedziałach (podzbiorach dziedziny) są rosnące, w innych malejące lub stałe (przykład zależności temperatury od czasu – przedstawiony na początku tematu). Wówczas mówimy o przedziałach monotoniczności funkcji.

Poniższy przykład ilustruje funkcję przedziałami monotoniczną. Pokażemy, jak odczytać z wykresu przedziały monotoniczności funkcji.

Przykład 2.

Odczytajmy przedziały monotoniczności funkcji f, której wykres jest przedstawiony na poniższym rysunku.



Aby łatwiej było nam odczytać zbiory, w których funkcja jest malejąca, rosnąca lub stała, prowadzimy pomocnicze proste prostopadłe do osi OX, które dzielą wykres funkcji f na odpowiednie części (dzielą też dziedzinę funkcji na odpowiednie przedziały). Przedziały monotoniczności funkcji odczytujemy na osi OX.

Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -3\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$
Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -3, 1\rangle$, $\langle 6, 8)$
Funkcja jest stała w przedziale: $\langle 4, 6\rangle$

Zauważ, że funkcja f jest funkcją rosnącą w każdym z przedziałów:
$(-\infty, -3\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$
a nie jest rosnąca w sumie tych przedziałów, czyli w poniżej określonym zbiorze B:
$B = (-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, 4\rangle$
Weźmy bowiem dwa dowolne argumenty funkcji f należące do zbioru B, na przykład
$x_1 = -5$ oraz $x_2 = 2$
i odczytajmy wartości funkcji dla tych argumentów:
$f(x_1) = f(-5) = 1$ oraz $f(x_2) = f(2) = -1$
Okazuje się, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$, zatem funkcja f nie jest rosnąca w zbiorze B. Dlatego przedziały monotoniczności funkcji wygodnie jest podawać jako osobne zbiory, oddzielając je przecinkiem. W ten sposób unikamy ewentualnych błędów.

Przykład 3.

Udowodnimy, korzystając z odpowiednich definicji, że funkcja:
a) $f(x) = x^2 + 5$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$
b) $g(x) = \sqrt{x - 2}$ jest rosnąca.

Ad a) Założenie: $f(x)=x^2+5$ – dana funkcja, $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$ i $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) > f(x_2)$

Dowód: Wyznaczamy różnicę $f(x_1)-f(x_2)$:

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+5)-(x_2^2+5)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

Z założenia wiemy, że $x_1 < x_2$, czyli $x_1-x_2<0$ oraz $x_1<0$ i $x_2 \leqslant 0$, więc $x_1+x_2<0$. Zatem iloczyn $(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ jest dodatni. Stąd $f(x_1)-f(x_2)>0$, czyli $f(x_1)>f(x_2)$. Ponieważ x_1, x_2 oznaczały dowolne liczby z przedziału $(-\infty, 0\rangle$, więc to znaczy, że funkcja $f(x)=x^2+5$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$.

Ad b) Założenie: $g(x)=\sqrt{x-2}$ – dana funkcja, $D_g=\langle 2, +\infty)$, $x_1, x_2 \in D_g$ i $x_1 < x_2$

Teza: $g(x_1) < g(x_2)$

Dowód: Wyznaczamy różnicę $g(x_1)-g(x_2)$:

$$g(x_1)-g(x_2)=\sqrt{x_1-2}-\sqrt{x_2-2}=\frac{\left(\sqrt{x_1-2}\right)^2-\left(\sqrt{x_2-2}\right)^2}{\sqrt{x_1-2}+\sqrt{x_2-2}}=\frac{(x_1-2)-(x_2-2)}{\sqrt{x_1-2}+\sqrt{x_2-2}}=$$

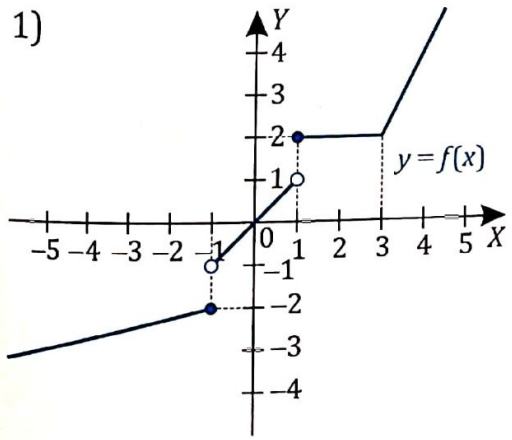
$$=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1-2}+\sqrt{x_2-2}}$$

W wyniku przekształceń otrzymaliśmy ułamek, którego licznik jest ujemny, a mianownik dodatni (uzasadnij to dokładnie), zatem ułamek jest ujemny, czyli $g(x_1)-g(x_2)<0$, więc $g(x_1)<g(x_2)$. Ponieważ x_1, x_2 oznaczały dowolne liczby z dziedziny, więc to znaczy, że funkcja $g(x)=\sqrt{x-2}$ jest rosnąca.

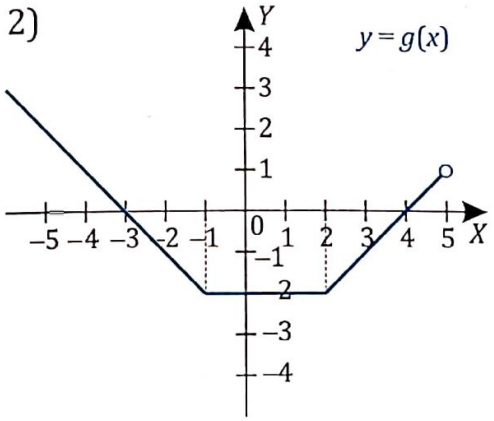
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy funkcji f, g.

1)



2)



   a) Podaj przedziały monotoniczności każdej funkcji.
   b) Która funkcja jest monotoniczna?

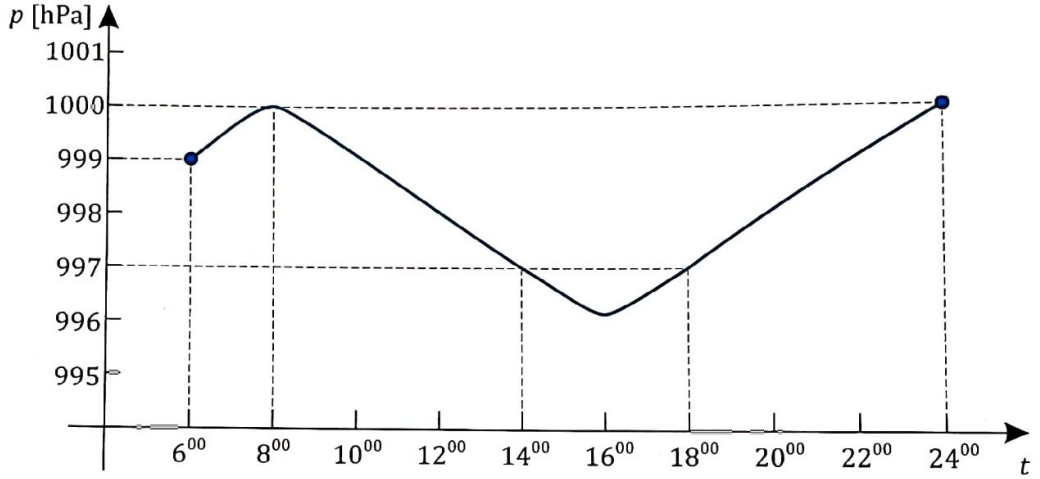
2. Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 0\rangle$.

3. Zbadaj monotoniczność funkcji danej wzorem $g(x)=\frac{2}{x-3}+1$ w zbiorze $(3, +\infty)$.

Funkcje różnowartościowe

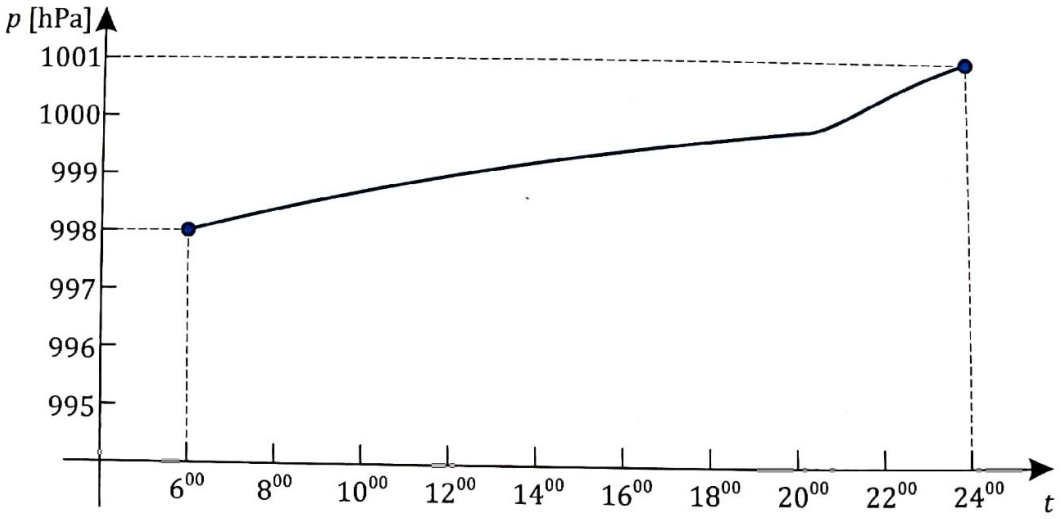
Duży wpływ na nasze samopoczucie ma ciśnienie atmosferyczne. Wahania ciśnienia w ciągu dnia sprawiają, że bywamy niecierpliwi, rozdrażnieni, mamy kłopoty z koncentracją uwagi. Poniżej przedstawione są wykresy zależności wartości ciśnienia atmosferycznego od czasu, sporządzone w dwóch różnych dniach w pewnej miejscowości. Każdego dnia pomiar rozpoczynano o godzinie 6^{00} i kończono o godzinie 24^{00}.
Przeanalizujemy te wykresy. Pomogą nam w tym pytania pod wykresami.

a) Wykres wartości ciśnienia we wtorek.



W jakich godzinach wartość ciśnienia wynosiła 1000 hPa? Jaką wartość miało ciśnienie atmosferyczne o godz. 14^{00}, a jaką o godz. 18^{00}?

b) Wykres wartości ciśnienia w czwartek.



Czy można wskazać takie pory dnia, w których ciśnienie miało taką samą wartość? Czy w różnych godzinach wartości ciśnienia były różne?

We wtorek można zaobserwować wahania ciśnienia atmosferycznego. Wartość ciśnienia atmosferycznego wynosiła 1000 hPa zarówno o godz. 8^{00}, jak też o godz. 24^{00}. O godz. 14^{00} oraz o godz. 18^{00} wartość ciśnienia atmosferycznego była taka sama i wynosiła 997 hPa.
W czwartek ciśnienie atmosferyczne systematycznie rosło. Nie zdarzyło się, aby wartość ciśnienia o różnych porach dnia była taka sama. W różnych godzinach wartości ciśnienia były różne.

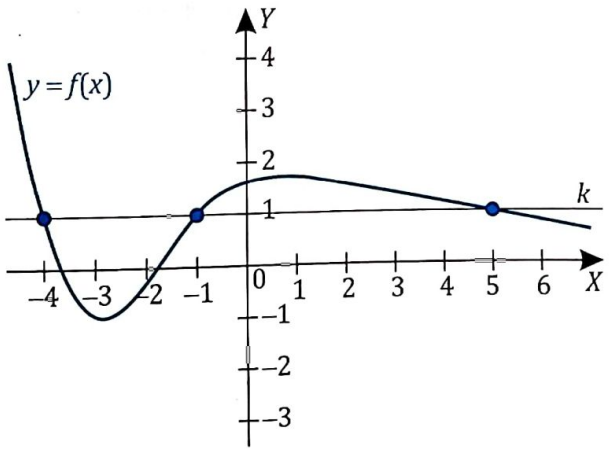
Wykres ciśnienia atmosferycznego wykonany we wtorek jest przykładem wykresu funkcji, która nie jest różnowartościowa, zaś wykres ciśnienia atmosferycznego zrobiony w czwartek jest przykładem wykresu funkcji, która jest różnowartościowa.

Zauważ, że funkcja różnowartościowa każdą swoją wartość przyjmuje tylko jeden raz.

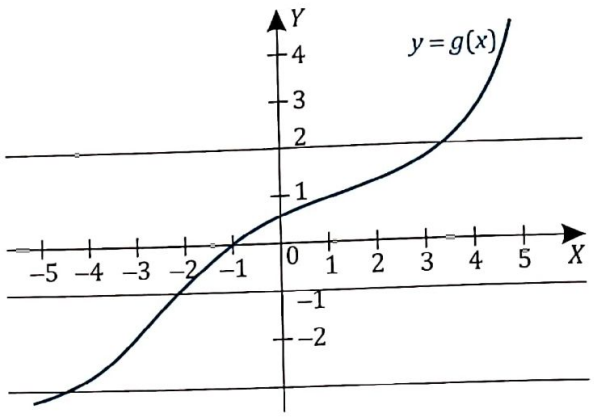
Definicja 1.
Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest **funkcją różnowartościową** wtedy i tylko wtedy, gdy różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości, to znaczy, że dla dowolnych argumentów x_1, x_2 z nierówności $x_1 \neq x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Możemy zapisać krócej:
Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest funkcją różnowartościową $\underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$
$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$

Aby ustalić, czy funkcja jest różnowartościowa, czy też nie jest różnowartościowa, wystarczy poprowadzić proste równoległe do osi OX i sprawdzić, ile punktów wspólnych mają te proste z wykresem funkcji. Spójrz na poniższe rysunki.



Prosta k przecięła wykres funkcji $y = f(x)$ w trzech punktach. Dla różnych argumentów $-4, -1, 5$, funkcja osiąga tę samą wartość równą 1.
Funkcja f nie jest różnowartościowa.

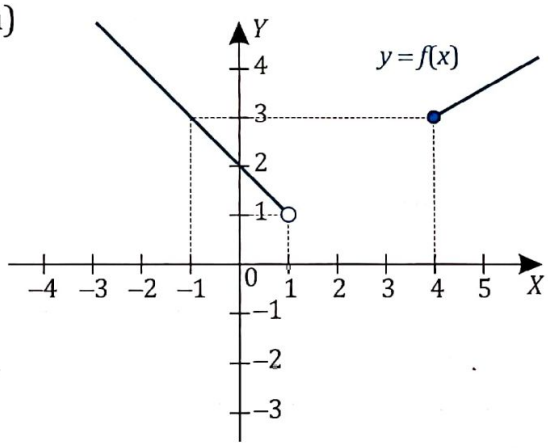


Nie istnieje prosta równoległa do osi OX, która przecięłaby wykres funkcji g więcej niż w jednym punkcie. Każda prosta ma z wykresem funkcji co najwyżej jeden punkt wspólny (ma tylko jeden punkt wspólny lub nie ma punktów wspólnych). Funkcja g jest funkcją różnowartościową.

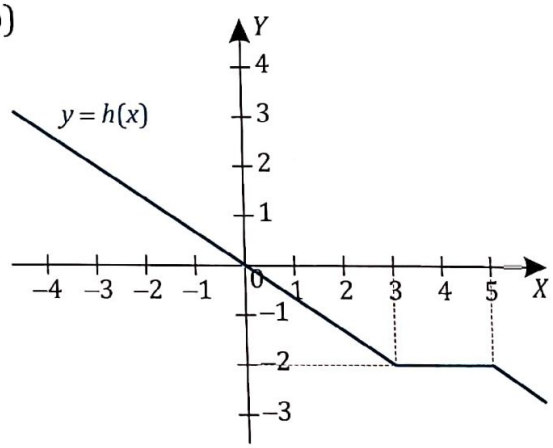
Przykład 1.

Poniżej przedstawione są wykresy funkcji, które nie są różnowartościowe.

a)



b)



Na rysunku a) widać, że funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dwa razy (dla jakich argumentów?), zaś funkcja h na rysunku b) przyjmuje wartość -2 dla wszystkich argumentów z przedziału $\langle 3, 5\rangle$.

Nie zawsze jednak funkcja opisana jest za pomocą wykresu. Jak wówczas sprawdzić, czy jest różnowartościowa, czy też nie jest różnowartościowa?

Przykład 2.

Oto przykład funkcji opisanej tabelką. Uzasadnimy, że nie jest to funkcja różnowartościowa.

x	-3	-2	0	1	5
$y=f(x)$	4	6	5	6	10

Wystarczy przeanalizować zbiór wartości funkcji. Wartość funkcji równa 6 wystąpiła dwukrotnie. Zatem funkcja nie jest różnowartościowa.

Przykład 3.

Udowodnimy, że funkcja $f(x) = 3x - 5$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest różnowartościowa.

Założenie: $f(x) = 3x - 5$ – dana funkcja, $D_f = \boldsymbol{R}$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ i $x_1 \neq x_2$
Teza: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Dowód: Wyznaczamy różnicę wartości funkcji f dla argumentów x_1, x_2:

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 5) - (3x_2 - 5) = 3x_1 - 5 - 3x_2 + 5 = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$$

Z założenia wiemy, że $x_1 \neq x_2$, czyli $x_1 - x_2 \neq 0$. Zatem iloczyn $3(x_1 - x_2)$ jest różny od zera. Stąd $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ponieważ x_1, x_2 oznaczały dowolne liczby ze zbioru $\boldsymbol{R}$, więc udowodniliśmy, że funkcja $f(x) = 3x - 5$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest różnowartościowa.

Przykład 4.

Wykażemy, że funkcja $f(x) = x^3$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest różnowartościowa.

Założenie: $f(x) = x^3$ – dana funkcja, $D_f = \boldsymbol{R}$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $x_1 \neq x_2$
Teza: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Dowód: Postępujemy podobnie jak w przykładzie 3.:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right) = (x_1 - x_2)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x_2}{2}\right)^2\right]$$

Ponieważ $x_1 \neq x_2$, więc $x_1 - x_2 \neq 0$. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym przyjmuje wartości dodatnie (jest sumą dwóch kwadratów; byłoby równe zero tylko w przypadku, gdy $x_1 = x_2 = 0$, ale jest to sprzeczne z założeniem). Zatem $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, czyli $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ponieważ x_1 i x_2 oznaczały dowolne liczby rzeczywiste, więc wykazaliśmy, że funkcja $f(x) = x^3$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest różnowartościowa.

W dowodzeniu różnowartościowości funkcji liczbowej często stosuje się definicję 1'. równoważną definicji 1., którą podajemy poniżej.

Definicja 1'.
Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest **funkcją różnowartościową** wtedy i tylko wtedy, gdy z równości wartości funkcji tej funkcji wynika równość argumentów, to znaczy, że dla dowolnych argumentów x_1, x_2 z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika równość $x_1 = x_2$.

Możemy zapisać krócej:
Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest funkcją różnowartościową $\underset{\text{z def.}}{\Leftrightarrow}$

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

Definicje 1. i 1'. są równoważne na mocy równoważności implikacji prostej i przeciwstawnej (zobacz str. 17).

Przykład 5.

Wykażemy – korzystając z definicji 1′. – że funkcja $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-2\}$, jest różnowartościowa.

Założenie: $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ – dana funkcja, $D_f=\boldsymbol{R}-\{-2\}$, $x_1, x_2 \in D_f$, $f(x_1)=f(x_2)$

Teza: $x_1=x_2$

Dowód: Z założenia wiemy, że $x_1, x_2 \in D_f$ i $f(x_1)=f(x_2)$, zatem

$$\frac{x_1-3}{x_1+2}=\frac{x_2-3}{x_2+2}$$

Z własności proporcji otrzymujemy:

$(x_1-3)(x_2+2)=(x_1+2)(x_2-3)$, stąd mamy:

$x_1x_2+2x_1-3x_2-6=x_1x_2-3x_1+2x_2-6$, więc

$5x_1=5x_2 \quad / : 5$

$x_1=x_2$

Ponieważ x_1, x_2 oznaczały dowolne liczby z dziedziny funkcji, więc udowodniliśmy, że funkcja $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-2\}$, jest różnowartościowa.

Aby wykazać, że funkcja nie jest różnowartościowa, wystarczy wskazać dwa różne argumenty, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość.

Przykład 6.

Funkcja $f(x)=\frac{4}{2x^2+1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, nie jest różnowartościowa, bo na przykład dla argumentów -1 i 1 funkcja f przyjmuje tę samą wartość. Mamy:

$f(-1)=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ oraz

$f(1)=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$, więc

$f(-1)=f(1)$.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje zależność między monotonicznością funkcji a jej różnowartościowością.

Twierdzenie 1.

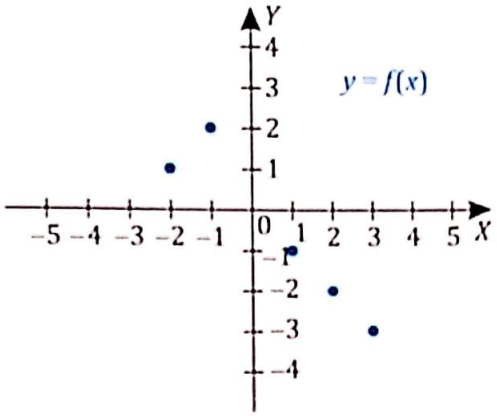
a) Jeśli funkcja f jest rosnąca w pewnym zbiorze, to jest w tym zbiorze różnowartościowa.

b) Jeśli funkcja f jest malejąca w pewnym zbiorze, to jest w tym zbiorze różnowartościowa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1. nie jest prawdziwe.
Funkcja różnowartościowa w zbiorze A nie musi być w tym zbiorze ani rosnąca, ani malejąca. Pokażemy to na przykładzie.

Rozważmy funkcję opisaną wzorem: $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ jeśli } x \in \{-2, -1\} \\ -x, \text{ jeśli } x \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$.

Wykres funkcji f pokazany jest na poniższym rysunku.

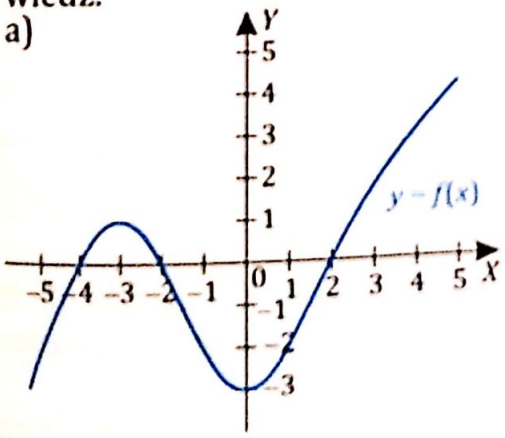


Funkcja f jest w zbiorze $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ różnowartościowa, ale nie jest w tym zbiorze monotoniczna.

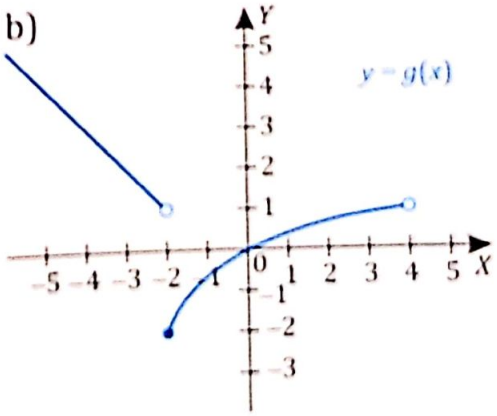
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku pokazane są wykresy funkcji f i g. Która z nich jest różnowartościowa, a która nie jest różnowartościowa? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a)



b)



2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2-4}{5x^2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$. Wykaż, że funkcja f nie jest różnowartościowa.

3. Wykaż na podstawie definicji, że podane poniżej funkcje są różnowartościowe.
   a) $f(x) = 4x - 2, x \in \boldsymbol{R}$
   b) $f(x) = 3x^2 - 5, x \in (-\infty, 0)$
   c) $f(x) = \frac{x+5}{x-3}, x \in \boldsymbol{R} - \{3\}$
   d) $f(x) = \frac{1}{4-x}, x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$

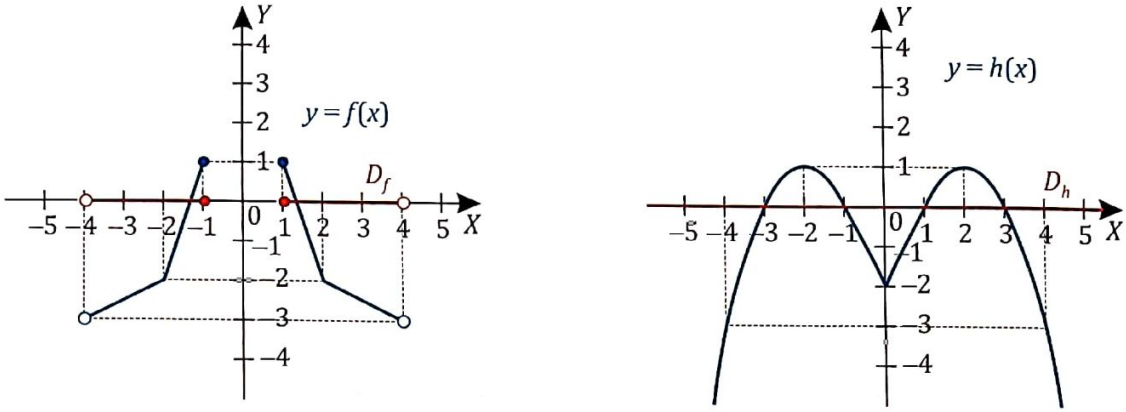
4. Naszkicuj wykres funkcji różnowartościowej, która ma jedno miejsce zerowe i jest określona w zbiorze $\langle -3, 7)$.

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

Szkicując wykresy różnych funkcji, na pewno zauważyłeś, że niektóre z nich charakteryzują się symetrią względem osi *OY*, inne są symetryczne względem początku układu współrzędnych, a jeszcze inne nie mają żadnej z wymienionych własności.

Przykład 1.

Wykresy funkcji przedstawione na poniższym rysunku są osiowosymetryczne. Ich osią symetrii jest oś *OY*. Przyjrzymy się dziedzinom oraz wartościom tych funkcji.



1) Dla każdej funkcji dziedzina jest zbiorem symetrycznym względem punktu 0 na osi *OX*. Znaczy to, że dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji liczba $-x$ też jest elementem dziedziny tej funkcji, zatem jeśli $x \in D$, to $-x \in D$.
2) Każda funkcja, której wykres przedstawiony jest na rysunku, ma tę własność, że dla argumentu x przyjmuje tę samą wartość co dla argumentu $-x$, czyli dla dowolnej liczby $x \in D$ zachodzi równość:

$$f(x) = f(-x)$$

Funkcje, które spełniają warunek 1) i 2), nazywamy funkcjami parzystymi.

Definicja 1.
Funkcję liczbową f nazywamy **funkcją parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji f liczba $-x$ również należy do dziedziny tej funkcji oraz $f(x) = f(-x)$.

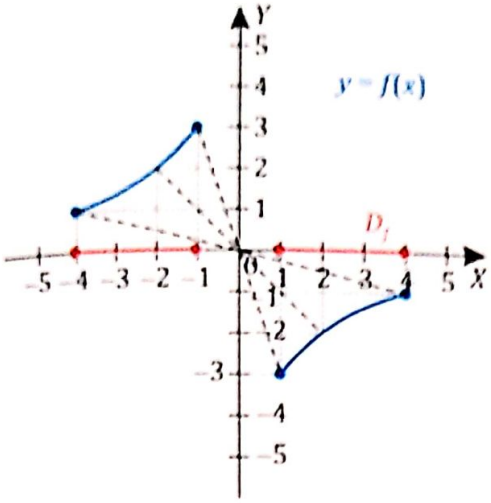
Możemy zapisać krócej:

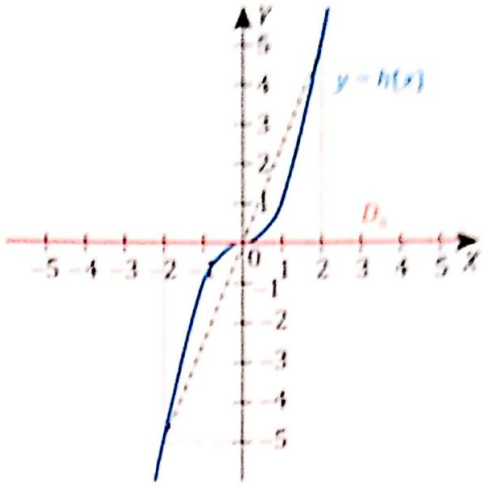
Funkcja liczbowa f jest funkcją parzystą $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)]$

Funkcjami parzystymi są np.: $f(x) = x^2, x \in \boldsymbol{R}$ oraz $f(x) = \max(3, |x|), x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 2.

Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy funkcji, które są symetryczne względem punktu $O(0, 0)$. Co możemy powiedzieć o dziedzinie każdej z nich? Czym charakteryzują się wartości tych funkcji?





1)Podobnie jak w przykładzie 1. dziedzina każdej funkcji jest zbiorem symetrycznym względem punktu 0 na osi OX, więc jeśli $x \in D$, to $-x \in D$.

2) Dla argumentu x funkcja przyjmuje wartość przeciwną niż dla argumentu $-x$, zatem dla dowolnej liczby $x \in D$ zachodzi warunek:

$$f(-x) = -f(x)$$

O funkcjach, które spełniają powyższe dwa warunki, mówimy, że są funkcjami nieparzystymi.

Definicja 2.

Funkcję liczbową f nazywamy **funkcją nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby należącej do dziedziny funkcji f liczba $-x$ również należy do dziedziny tej funkcji oraz $f(-x) = -f(x)$.

Można zapisać krócej:

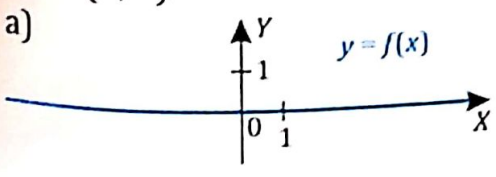
Funkcja liczbowa f jest funkcją nieparzystą $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)]$.

Funkcjami nieparzystymi są np.: $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in R$, $f(x) = x^3, x \in R$.

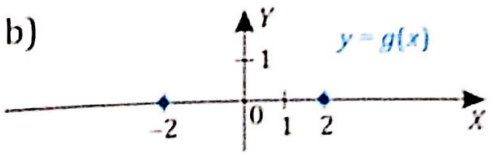
UWAGA: Funkcja, która nie jest parzysta, nie musi być nieparzysta. Istnieją funkcje, które są tylko parzyste, tylko nieparzyste, parzyste i nieparzyste jednocześnie oraz takie, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste.

Poniżej przedstawione są wykresy funkcji, które są jednocześnie parzyste i nieparzyste. Wykresy te są symetryczne zarówno względem osi OX, jak i względem punktu $O(0, 0)$.

a)



b)



Zajmiemy się teraz funkcjami, których wykresów jeszcze nie potrafimy naszkicować.

Przykład 3.

Zbadamy parzystość funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{5}{(x-2)(x+3)}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $R - \{-3, 2\}$. Dziedzina funkcji nie jest zbiorem symetrycznym względem punktu 0 na osi OX. Funkcja f nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

Przykład 4.

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \frac{3x^4-4}{x^2-1}$ jest funkcją parzystą.

Założenie: $f(x) = \frac{3x^4-4}{x^2-1}$, $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

Teza: f jest funkcją parzystą

Dowód:
Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$. Jest to zbiór symetryczny względem punktu 0 na osi OX,

$\bigwedge_{x \in R-\{-1,1\}} (-x) \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$ (pierwszy warunek definicji 1. jest spełniony).

Sprawdzimy teraz, czy dla dowolnej liczby x należącej do dziedziny spełniony jest warunek:

$f(-x) = f(x)$.

Otrzymujemy:

$$f(-x) = \frac{3\cdot(-x)^4-4}{(-x)^2-1} = \frac{3\cdot x^4-4}{x^2-1} = f(x)$$ (drugi warunek definicji 1. jest spełniony)

Funkcja f jest funkcja parzystą.

Przykład 5.

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \frac{2x^3-x}{5x^2+6}$ jest funkcją nieparzystą.

Założenie: $f(x) = \frac{2x^3-x}{5x^2+6}$, $D = \boldsymbol{R}$

Teza: f jest funkcją nieparzystą

Dowód:
Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$, więc

$\bigwedge_{x \in R}(-x \in \boldsymbol{R})$

Sprawdzamy, czy dla każdej liczby rzeczywistej x spełniony jest warunek:
$f(-x)=-f(x)$

Mamy:

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)^3-(-x)}{5(-x)^2+6}=\frac{2\cdot(-x^3)+x}{5x^2+6}=\frac{-2x^3+x}{5x^2+6}=$$

$$=\frac{-(2x^3-x)}{5x^2+6}=-\frac{2x^3-x}{5x^2+6}=-f(x)$$

Oba warunki definicji 2. są spełnione, więc f jest funkcją nieparzystą.

Przykład 6.

Wykażemy, że jeśli funkcja f jest funkcją nieparzystą określoną w zbiorze $\boldsymbol{R}$, to $f(0)=0$.

Założenie: f – funkcja nieparzysta, $D_f=\boldsymbol{R}$
Teza: $f(0)=0$.

Dowód:
Ponieważ funkcja f jest funkcją nieparzystą określoną w zbiorze $\boldsymbol{R}$, więc

$\bigwedge_{x\in R} f(-x)=-f(x)$, czyli

$\bigwedge_{x\in R} f(-x)+f(x)=0$

Zatem dla argumentu 0 otrzymujemy:

$f(0)+f(0)=0$, skąd
$2\cdot f(0)=0$, czyli
$f(0)=0$, co kończy dowód.

Przykład 7.

Wykażemy, że funkcja $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{jeśli } x\leqslant 0\\ x+1, & \text{jeśli } x>0\end{cases}$ jest parzysta i nie jest nieparzysta.

Założenie: $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{jeśli } x\leqslant 0\\ x+1, & \text{jeśli } x>0\end{cases}$

Teza: f jest funkcją parzystą
f nie jest funkcją nieparzystą

Dowód:
Wykażemy najpierw, że f jest funkcją parzystą.
1) Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$, więc

$\bigwedge_{x\in R}(-x\in \boldsymbol{R})$

2) Zauważamy, że

jeśli $x < 0$, to funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x + 1$.

Jeśli $x < 0$, to $(-x) > 0$, więc $f(-x) = -x + 1$, czyli

$$f(-x) = f(x)$$

Podobnie

jeśli $x > 0$, to funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x + 1$.

Jeśli $x > 0$, to $(-x) < 0$, więc $f(-x) = -(-x) + 1$, skąd $f(-x) = x + 1$, czyli

$$f(-x) = f(x)$$

Ponadto jeśli $x = 0$, to $f(-x) = f(x) = 1$.

Tak więc dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy $f(-x) = f(x)$, czyli f jest funkcją parzystą.

Wykażemy teraz, że f nie jest funkcją nieparzystą.

Funkcja f jest określona dla 0. Gdyby f była nieparzysta, to jej wartość dla argumentu 0 wynosiłaby 0 (zobacz przykład 6.). Tymczasem

$$f(0) = 1,$$

a więc f nie jest funkcją nieparzystą.

Dowolną funkcję f określoną w zbiorze A, symetrycznym względem punktu 0, można zapisać jako sumę dwóch funkcji: jednej parzystej i drugiej nieparzystej (obie te funkcje określone są w zbiorze A).

Rozważmy następujące funkcje:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

oraz

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ponieważ dziedziną funkcji f jest zbiór A, zatem dziedziną funkcji f_1 oraz funkcji f_2 jest również zbiór A.

Sumą funkcji f_1 i f_2 jest funkcja f. Mamy bowiem dla dowolnej liczby $x \in A$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2 \cdot f(x)}{2} = f(x)$$

Wykażemy, że funkcja f_1 jest funkcją parzystą. Dla dowolnej liczby $x \in A$ wiemy, że $-x \in A$ oraz

$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x)$$

zatem

$$\bigwedge_{x \in A} \left[(-x) \in A \wedge f_1(-x) = f_1(x)\right]$$

czyli f_1 jest funkcją parzystą.

Teraz pokażemy, że funkcja f_2 jest funkcją nieparzystą. Dla dowolnej liczby $x \in A$ wiemy, że $-x \in A$ oraz

$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-f_2(x)$$

zatem

$$\bigwedge_{x\in A}\left[(-x)\in A\wedge f_2(-x)=-f_2(x)\right]$$

czyli f_2 jest funkcją nieparzystą.

Funkcję $y=f(x)$ możemy przedstawić jako sumę funkcji parzystej $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ i funkcji nieparzystej $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Przykład 8.

Dana jest funkcja f określona wzorem: $f(x)=\frac{1}{x+1}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$.

Korzystając z podanych wyżej wzorów, przedstawimy funkcję f w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej.

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-x+1}}{2}=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-(x-1)}}{2}=\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{2}=\frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{2}=\frac{-1}{x^2-1}$$

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{-x+1}}{2}=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{2}=\frac{\frac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{2x}{(x+1)(x-1)}}{2}=\frac{x}{x^2-1}$$

Zatem $f(x)=\frac{-1}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}$, $x\in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$.

Sprawdź, że funkcja $f_1(x)=\frac{-1}{x^2-1}$ jest parzysta, zaś $f_2(x)=\frac{x}{x^2-1}$ jest nieparzysta.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
   a) f jest parzysta oraz $D_f=\langle -6, -2)\cup(2, 6\rangle$ i $ZW_f=(-3, 4\rangle$
   b) f jest nieparzysta oraz $D_f=\boldsymbol{R}$, $ZW_f=(-2, 2)$ i f ma trzy miejsca zerowe.
2. Wykaż, że funkcja określona wzorem:
   a) $f(x)=x^3+x$ jest nieparzysta
   b) $g(x)=\frac{5}{x^2-4}$ jest parzysta.
3. Zapisz wzór funkcji f w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej, jeśli:
   a) $f(x)=x^6-5x^5+2x^2+1$, $x\in \boldsymbol{R}$
   b) $f(x)=\frac{3-x}{x+2}$, $x\in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$.