Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego

Przykład 1.

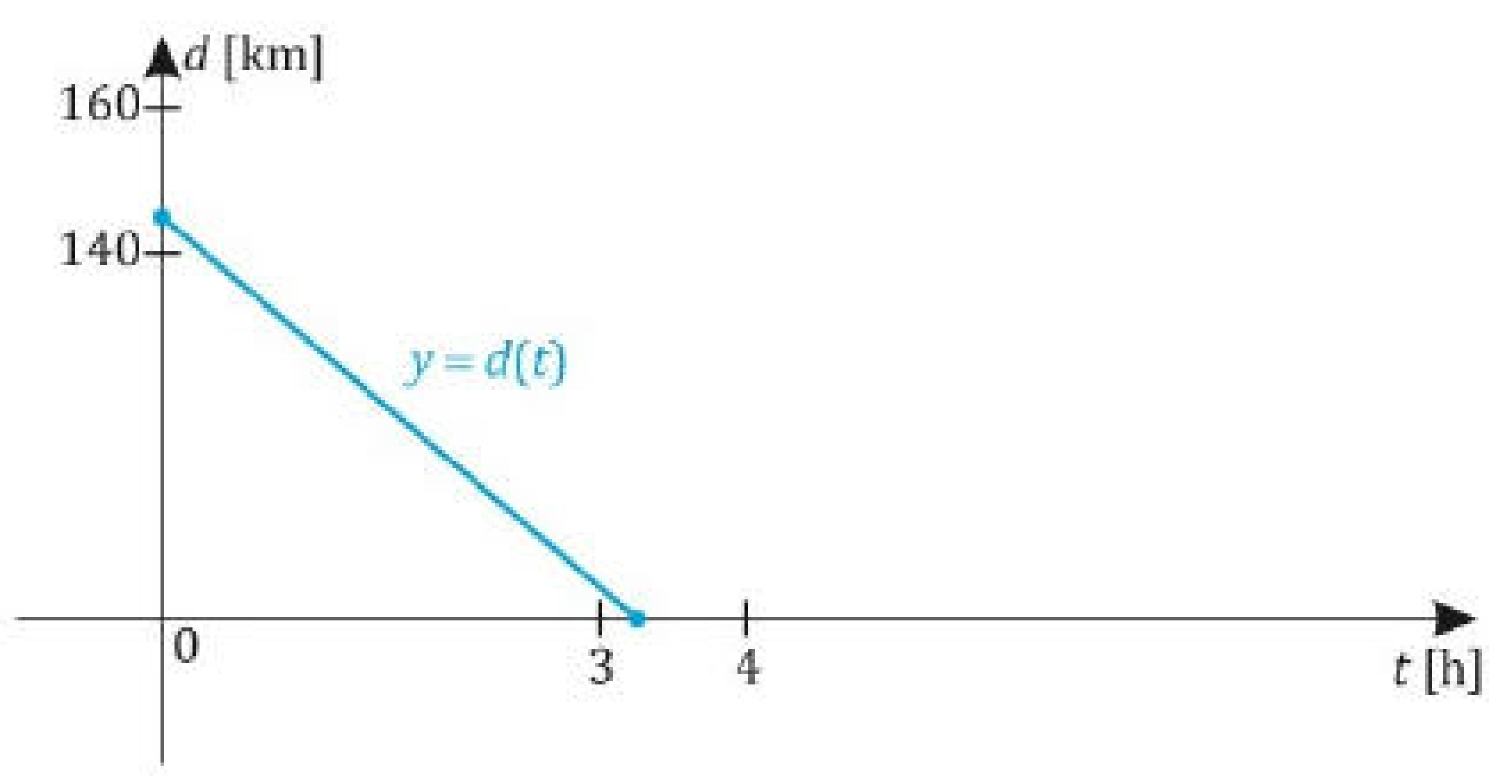
W wyścigu kolarskim grupa sportowców ma jeszcze 144 km do mety i jedzie ze średnią prędkością 45 km/h. Oznaczmy odległość (w km) tej grupy od mety literą *d*, zaś czas jazdy (w h) – literą *t*.

a) Wyznaczymy wzór opisujący odległość tej grupy od mety, w zależności od czasu.
b) Naszkicujemy wykres funkcji *d*.
c) Obliczymy, ile czasu potrzeba kolarzom, by dotrzeć do mety.

Ad a) Odległość grupy kolarzy od mety, w zależności od czasu *t*, opisuje wzór:

$$d(t) = 144 - 45 \cdot t, \quad \text{gdzie } t \in \left\langle 0, 3\frac{1}{5} \right\rangle$$

Ad b)



Ad c) Kolarze dotrą do mety w czasie *t*, dla którego $d(t) = 0$. Zatem:

$$144 - 45 \cdot t = 0, \text{ skąd } t = 3{,}2 \text{ (h)}$$

Kolarze dotrą do mety za 3 godziny i 12 minut.

Przykład 2.

W pewnym kraju od podatku dochodowego są zwolnione dochody nieprzekraczające 5 tys. dolarów. Za dochody przekraczające 5 tys. dolarów, ale nie większe niż 30 tys. dolarów, podatnik płaci podatek w wysokości 10% od dochodu pomniejszonego o 5 tys. dolarów. Jeżeli dochód przekracza 30 tys. dolarów, podatnik płaci 2500 dolarów plus 25% nadwyżki powyżej 30 tys. dolarów.

Opiszemy system podatkowy w tym kraju za pomocą funkcji *f*, która pokazuje zależność podatku od dochodu, i naszkicujemy jej wykres.

Oznaczamy:
x – dochód uzyskany przez podatnika (w dolarach)
y – podatek, jaki należy zapłacić od uzyskanego dochodu (w dolarach).

Jeżeli podatnik uzyska dochód x z przedziału $\langle 0, 5000 \rangle$, to nie płaci podatku, czyli podatek ma wartość równą zeru.
Jeśli dochód x podatnika spełnia warunek

$5000 < x \leqslant 30\,000$,

podatnik płaci podatek obliczany w następujący sposób: dochód x pomniejszamy o 5000 dolarów i otrzymujemy kwotę

$x - 5000$

dolarów; następnie obliczamy 10% uzyskanej w ten sposób kwoty, czyli

$0{,}1 \cdot (x - 5000)$

Zatem podatnik, którego dochód znajduje się w przedziale $(5000, 30\,000\rangle$, zapłaci podatek w wysokości

$0{,}1x - 500$

Jeżeli natomiast dochód x podatnika przekroczy 30 tys. dolarów, to postępujemy następująco: od uzyskanego dochodu odejmujemy 30 000 dolarów i otrzymujemy nadwyżkę powyżej 30 000 dolarów, równą

$x - 30\,000$

obliczamy 25% z otrzymanej nadwyżki, czyli

$0{,}25 \cdot (x - 30\,000)$

i otrzymujemy kwotę

$0{,}25x - 7500$,

do której należy jeszcze dodać opłatę stałą w wysokości 2500 dolarów. Zatem podatek w tym przypadku wynosi:

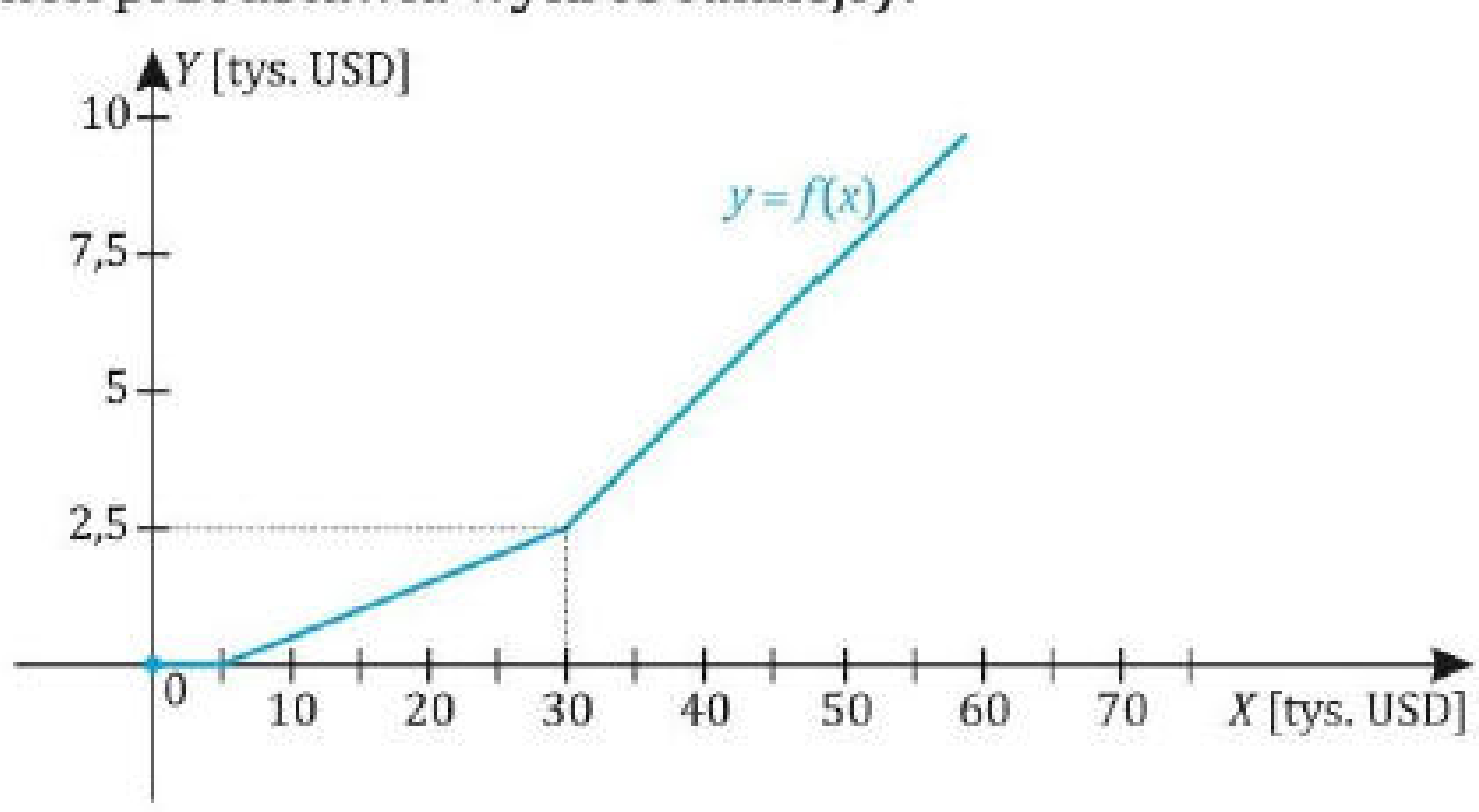
$0{,}25x - 7500 + 2500$, czyli

$0{,}25x - 5000$

Oto wzór funkcji f, opisującej system podatkowy w tym kraju:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 0{,}1x - 500, & \text{jeśli } 5000 < x \leqslant 30\,000 \\ 0{,}25x - 5000, & \text{jeśli } x > 30\,000 \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji f:



Oblicz, jaki podatek zapłaci obywatel tego kraju, który uzyskał dochód równy 28 000 dolarów, a jaki obywatel, którego dochód wyniósł 86 000 dolarów.

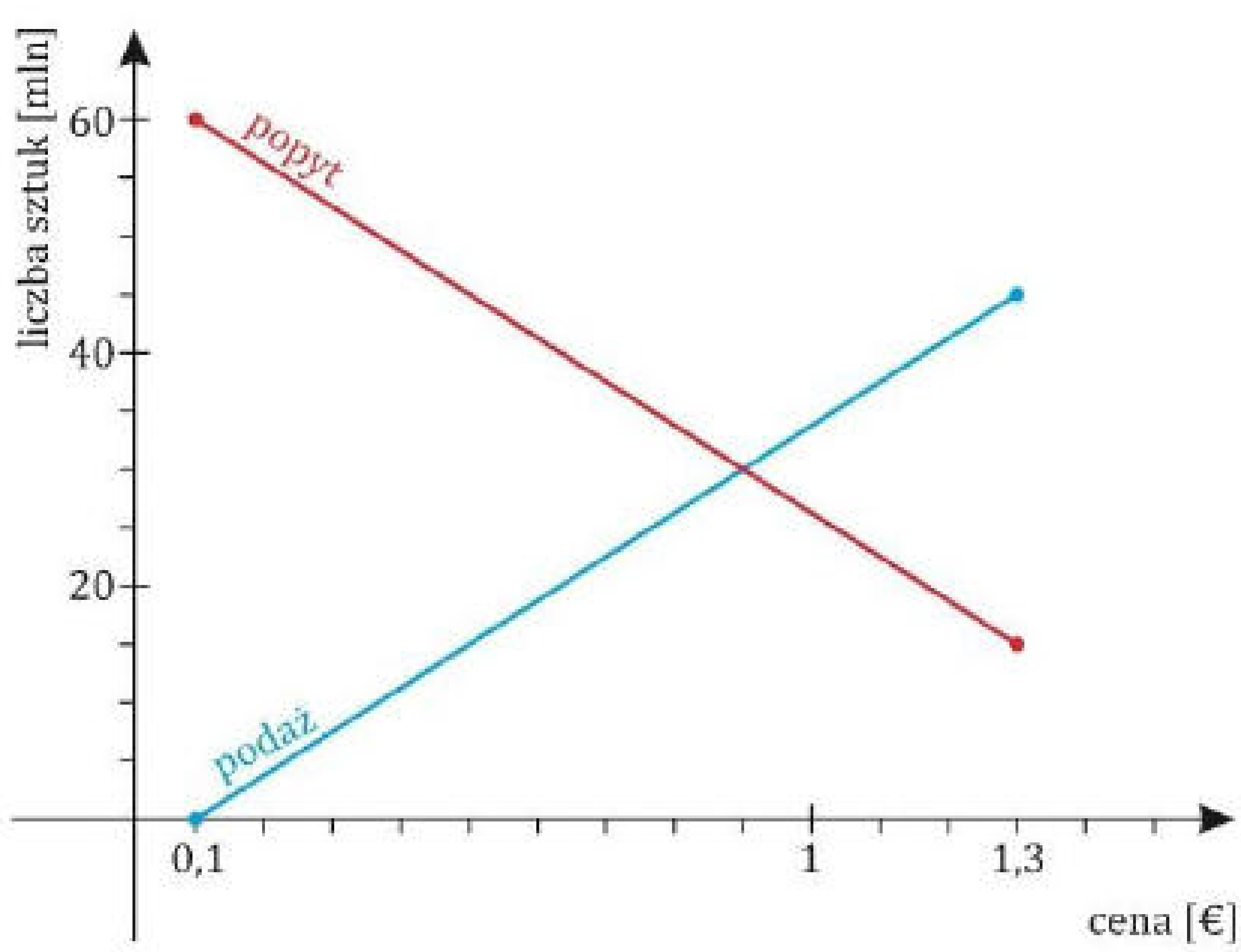
W ekonomii rozpatruje się zagadnienie popytu i podaży. Popyt to ilość dobra, jaką nabywcy są skłonni zakupić przy różnych poziomach ceny (w określonym czasie). Podaż to ilość dobra, jaką producenci są gotowi zaoferować przy różnych poziomach ceny. Przy pewnym poziomie ceny zapotrzebowanie zrównuje się z ilością oferowaną. Taką cenę nazywamy ceną równowagi.

Przykład 3.

W pewnym europejskim kraju przeprowadzono badania dotyczące zainteresowania producentów wytwarzaniem tabliczek czekolady, jak i zainteresowania konsumentów nabywaniem tabliczek czekolady. Okazało się, że jeśli cena tabliczki czekolady byłaby równa 0,1 €, to popyt wyniósłby wówczas 60 mln sztuk (na rok). Natomiast przy cenie za tabliczkę 1,3 € popyt zmalałby do 15 mln sztuk (na rok). Stwierdzono również, że przy cenie 0,1 € za tabliczkę producenci w ogóle nie byliby zainteresowani wytwarzaniem tabliczek czekolady, czyli podaż byłaby równa zeru. Natomiast przy cenie 1,3 € za tabliczkę podaż byłaby równa 45 mln sztuk (na rok). Załóżmy dodatkowo, że wraz ze wzrostem ceny od 0,1 € do 1,3 € popyt i podaż zmieniają się liniowo (tzn. wykresy przedstawiające popyt i podaż będą odcinkami prostej).

a) Przedstawimy w układzie współrzędnych wykresy obrazujące popyt i podaż (tzw. krzywe popytu i podaży).
b) Wyznaczymy wzory krzywej popytu i krzywej podaży.
c) Wyznaczymy cenę równowagi dla tabliczki czekolady i odpowiadającą tej cenie liczbę wyprodukowanych sztuk.

Ad a) Popyt i podaż są funkcją ceny, więc na osi poziomej przedstawiona jest wartość ceny (w euro), a na osi pionowej zaznaczona jest liczba tabliczek czekolady (w mln sztuk).



Zwróć uwagę, że popyt jest funkcją malejącą: wraz ze wzrostem ceny maleje liczba tabliczek czekolady, którą są skłonni zakupić konsumenci. Natomiast podaż jest funkcją rosnącą: wzrost ceny powoduje, że produkcja staje się atrakcyjna dla coraz większej liczby producentów, którzy chcą wytwarzać coraz więcej tabliczek czekolady.

Ad b) Z założenia wiemy, że popyt zmienia się liniowo, więc wzór funkcji opisującej popyt ma postać:

$y = ax + b,$

a do wykresu tej funkcji należą punkty: (0,1; 60) oraz (1,3; 15). Prowadzi to nas do układu równań:

$$\begin{cases} 60 = 0{,}1a + b \\ 15 = 1{,}3a + b \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy: $\begin{cases} a = -37{,}5 \\ b = 63{,}75 \end{cases}$

Otrzymaliśmy wzór funkcji opisującej popyt:

$y = -37{,}5x + 63{,}75$ wtedy, gdy $x \in \langle 0{,}1;\ 1{,}3\rangle$

Postępując podobnie, otrzymamy wzór funkcji opisującej podaż:

$y = 37{,}5x - 3{,}75$ wtedy, gdy $x \in \langle 0{,}1;\ 1{,}3\rangle$

Ad c) Cena równowagi to cena, dla której popyt jest równy podaży. Wyznaczymy ją więc z równania:

$-37{,}5x + 63{,}75 = 37{,}5x - 3{,}75$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymamy: $x = 0{,}9$ (€)
Cena równowagi tabliczki czekolady wynosi 0,9 €. Wówczas popyt i podaż równoważą się i są równe 30 mln tabliczek czekolady (sprawdź!).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. a) Napisz wzór funkcji wyrażającej zależność temperatury, podanej w stopniach Fahrenheita, od temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza, wiedząc, że ta zależność ma postać $F = aC + b$ oraz wiedząc, że 100°C to 212°F, zaś 35°C to 95°F.
   b) Oblicz temperaturę powietrza w stopniach Celsjusza, jeśli temperatura tego dnia była równa 59°F.
   c) Temperatura zdrowego człowieka wynosi 36,6°C. Wyraź tę temperaturę w skali Fahrenheita.
2. Właściciel sklepu z farbami zaopatruje się w odległej o 120 km fabryce farb i lakierów lub w położonej 10 km od sklepu hurtowni. W hurtowni za puszkę farby sklepikarz płaci 26 zł, zaś w fabryce taka sama puszka farby jest o 20% tańsza. Sklepikarz przywozi towar własnym samochodem, który pali średnio 8 litrów benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5 zł.
   a) Napisz wzór funkcji, która opisuje całkowity koszt zakupu farb, wraz z kosztami transportu, w przypadku zakupów w hurtowni ($y = h(x)$), jak i w fabryce ($y = f(x)$), gdzie x oznacza liczbę puszek farby.
   b) Przy jakiej liczbie puszek farby korzystniej jest zaopatrywać się w fabryce? (nie uwzględniamy czasu pracy właściciela sklepu oraz kosztów amortyzacji samochodu).