Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Z równaniami i nierównościami liniowymi zetknąłeś się wielokrotnie w trakcie uczenia się matematyki. W tym temacie zajmiemy się takimi równaniami i nierównościami, w zapisie których występuje parametr.

Definicja 1.

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie mające postać $ax + b = 0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązać równanie liniowe $ax + b = 0$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y = ax + b$ przyjmuje wartość zero?”. Wiesz już, że liczba miejsc zerowych funkcji liniowej $y = ax + b$ zależy od współczynników a, b (zobacz twierdzenie 1. str. 15).
Możemy zatem wyciągnąć następujące wnioski dotyczące równania liniowego.

Równanie liniowe $ax + b = 0$

1) ma tylko jedno rozwiązanie $\frac{-b}{a}$ wtedy, gdy
   $a \neq 0$

W takim wypadku równanie $ax + b = 0$ nazywamy **równaniem stopnia pierwszego** z jedną niewiadomą;

2) jest równaniem tożsamościowym (czyli każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania) wtedy, gdy
   $a = 0$ i $b = 0$
3) jest równaniem sprzecznym (czyli nie ma rozwiązań) wtedy, gdy
   $a = 0$ i $b \neq 0$.

Zauważ, że nie ma innych możliwości.

Przykład 1.

Zbadamy istnienie i liczbę rozwiązań równania

(*) $\qquad m^2x - m = x + 1$

w zależności od parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

Niewiadoma w naszym równaniu oznaczona jest literą x; dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Aby ułatwić sobie zadanie, przekształcimy równoważnie równanie (*) do postaci $ax + b = 0$.

$$m^2x - m = x + 1 \Leftrightarrow m^2x - m - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m^2 - 1\right)x - (m + 1) = 0$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\underbrace{\left(m^2 - 1\right)}_{a}x \underbrace{- (m + 1)}_{b} = 0$$

Wyznaczamy teraz te wartości parametru m, dla których współczynnik przy x (czyli współczynnik a) jest równy zeru.

$m^2-1=0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)=0 \Leftrightarrow (m-1=0 \vee m+1=0) \Leftrightarrow (m=1 \vee m=-1)$

Tak więc, jeśli $m \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, to współczynnik przy x jest różny od zera.

Teraz przechodzimy do dyskusji:

- Jeśli $m \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, to rozważane równanie ma jedno rozwiązanie $\frac{1}{m-1}$ (sprawdź to!).
- Jeśli $m=-1$, to rozważane równanie przyjmuje postać
  $0 \cdot x+0=0 \qquad (0=0)$

Jest to równanie tożsamościowe.

- Jeśli $m=1$, to rozważane równanie przyjmuje postać
  $0 \cdot x-2=0 \qquad (-2=0)$

Jest to równanie sprzeczne.

Rozpatrzyliśmy wszystkie wartości parametru m. Podsumujmy:

Jeśli $m \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, to równanie $m^2x-m=x+1$ ma tylko jedno rozwiązanie: $\frac{1}{m-1}$; jeśli $m=-1$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem danego równania; jeśli $m=1$, to równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2.

Zbadamy istnienie i liczbę rozwiązań równania $kx+p=2x+5$ w zależności od parametrów k oraz p, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, $p \in \boldsymbol{R}$.

Dane równanie zapiszemy w postaci $ax+b=0$. Mamy:

$kx+p=2x+5 \Leftrightarrow kx+p-2x-5=0 \Leftrightarrow (k-2)x+p-5=0$

Otrzymaliśmy zatem:

(*) $\qquad \underbrace{(k-2)}_{a}x+\underbrace{p-5}_{b}=0$

Współczynnik przy x przyjmuje wartość zero tylko wtedy, gdy

$k-2=0$, czyli $k=2$.

Zatem jeśli $k \in \boldsymbol{R}-\{2\}$, to współczynnik przy x jest różny od zera ($a \neq 0$).

Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań:

- Jeśli $k \in \boldsymbol{R}-\{2\}$, to równanie liniowe ma tylko jedno rozwiązanie równe $\frac{5-p}{k-2}$;
- Jeśli $k=2$, to równanie (*) przyjmuje postać $p-5=0$. Wówczas jeśli:
  a) $p=5$, to równanie (*) jest tożsamościowe ($a=0 \wedge b=0$);
  b) $p \neq 5$, to równanie (*) jest sprzeczne ($a=0 \wedge b \neq 0$).

Podsumujmy:

Jeśli $k \in \boldsymbol{R}-\{2\} \wedge p \in \boldsymbol{R}$, to równanie $kx+p=2x+5$ ma tylko jedno rozwiązanie równe $\frac{5-p}{k-2}$;

jeśli $k=2 \wedge p=5$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem danego równania;
jeśli $k=2 \wedge p \in \boldsymbol{R}-\{5\}$, to dane równanie nie ma rozwiązań.

Definicja 2.
Nierównością liniową z jedną niewiadomą x nazywamy nierówność mającą postać $ax+b>0$ lub $ax+b<0$ lub $ax+b \geqslant 0$ lub $ax+b \leqslant 0$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Jeśli $a \neq 0$, to każdą z nierówności liniowych wymienionych w definicji 2. nazywamy **nierównością pierwszego stopnia** z jedną niewiadomą.

Rozwiązać nierówność ostrą $ax+b>0$ $(ax+b<0)$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y = ax + b$ przyjmuje wartości dodatnie (ujemne)?”

Rozwiązać nierówność nieostrą $ax+b \geqslant 0$ $(ax+b \leqslant 0)$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x funkcja liniowa $y=ax+b$ przyjmuje wartości nieujemne (niedodatnie)?”

Przykład 3.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x+5m \geqslant 3$:

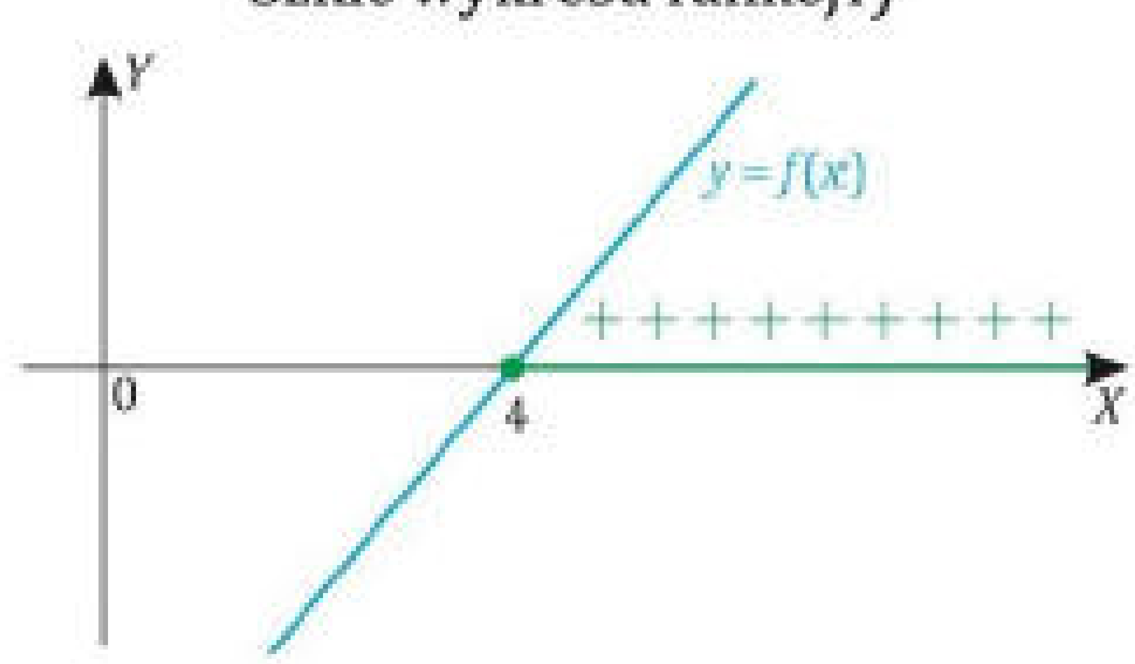
a) jest przedziałem $\langle 4, +\infty)$ b) zawiera się w przedziale $(4, +\infty)$.

Nierówność $2x+5m \geqslant 3$ przekształcamy równoważnie do postaci $2x+5m-3 \geqslant 0$. Rozważmy funkcję liniową $f(x)=2x+5m-3$. Zauważ, że funkcja f jest rosnąca.

Ad a) Mamy wyznaczyć te wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek:

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 4, +\infty)$

Szkic wykresu funkcji f



Do spełnienia powyższego warunku wystarczy, by miejscem zerowym funkcji liniowej f była liczba 4. Prowadzi nas to do równania

$f(4)=0$, czyli

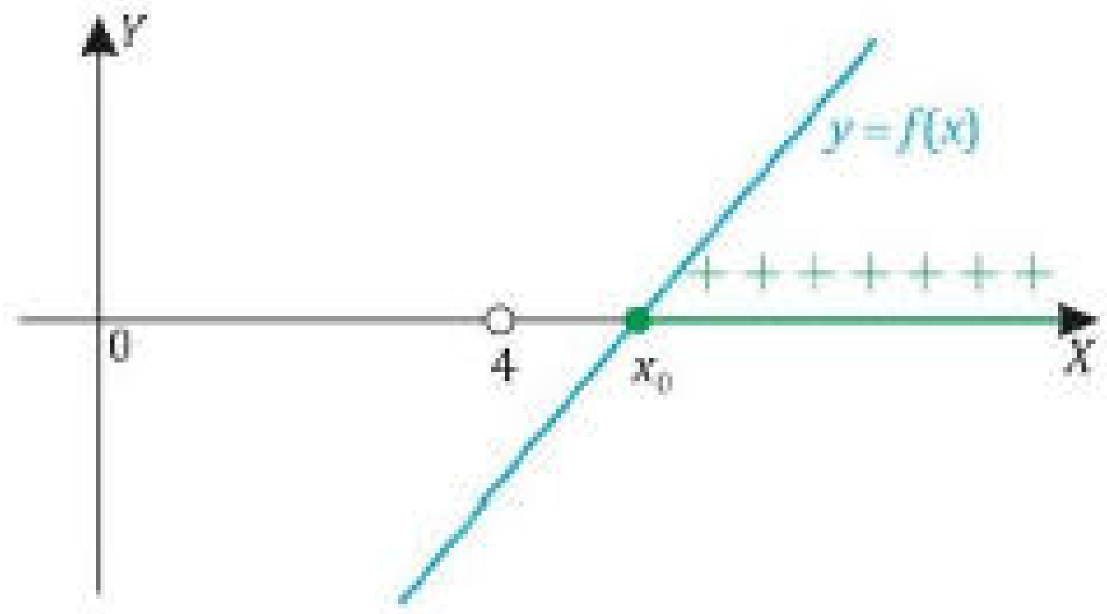
$2 \cdot 4+5m-3=0$, skąd

$m=-1$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2x+5m \geqslant 3$ jest przedział $\langle 4,+\infty)$ wtedy, gdy $m=-1$.

Ad b) Aby zbiór rozwiązań nierówności $2x+5m-3 \geqslant 0$ zawierał się w przedziale $(4,+\infty)$, wystarczy, żeby miejsce zerowe funkcji f było większe od 4.

Szkic wykresu funkcji f



Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f (w zależności od parametru m).

$2x+5m-3=0$, skąd

$2x=3-5m$

$x=\dfrac{3-5m}{2}$

Następnie rozwiązujemy nierówność.

$\dfrac{3-5m}{2}>4 \quad / \cdot 2$

$3-5m>8$

$-5m>5 \quad / : (-5)$

$m<-1$

Zbiór rozwiązań nierówności liniowej $2x+5m \geqslant 3$ zawiera się w przedziale $(4,+\infty)$ wtedy, gdy $m \in (-\infty,-1)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(9-k^2)x+1+k<0$ jest:

a) zbiór liczb rzeczywistych b) zbiór pusty.

Rozważmy funkcję liniową $g(x)=(9-k^2)x+1+k$.

Ad a) Funkcja g przyjmuje wartości ujemne w całym zbiorze liczb rzeczywistych tylko wtedy, gdy funkcja g jest funkcją stałą, a jej jedyną wartością jest liczba ujemna. Zatem spełnione są jednocześnie dwa warunki:

1) współczynnik przy x (czyli $9-k^2$) jest równy zeru oraz
2) wyraz wolny (czyli $1+k$) jest mniejszy od zera.

Mamy więc koniunkcję dwóch warunków:

$$\begin{cases} 9-k^2=0 \\ 1+k<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \vee k=-3 \\ k<-1 \end{cases} \Leftrightarrow k=-3$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(9-k^2)x+1+k<0$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy, gdy $k=-3$.

Ad b) Funkcja g nie przyjmuje wartości ujemnych dla żadnego argumentu tylko wtedy, gdy spełniony jest układ warunków (wyjaśnij to dokładnie):

$$\begin{cases} 9-k^2=0 \\ 1+k\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow k=3$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(9-k^2)x+1+k<0$ jest zbiór pusty wtedy, gdy $k=3$.

Przykład 5.

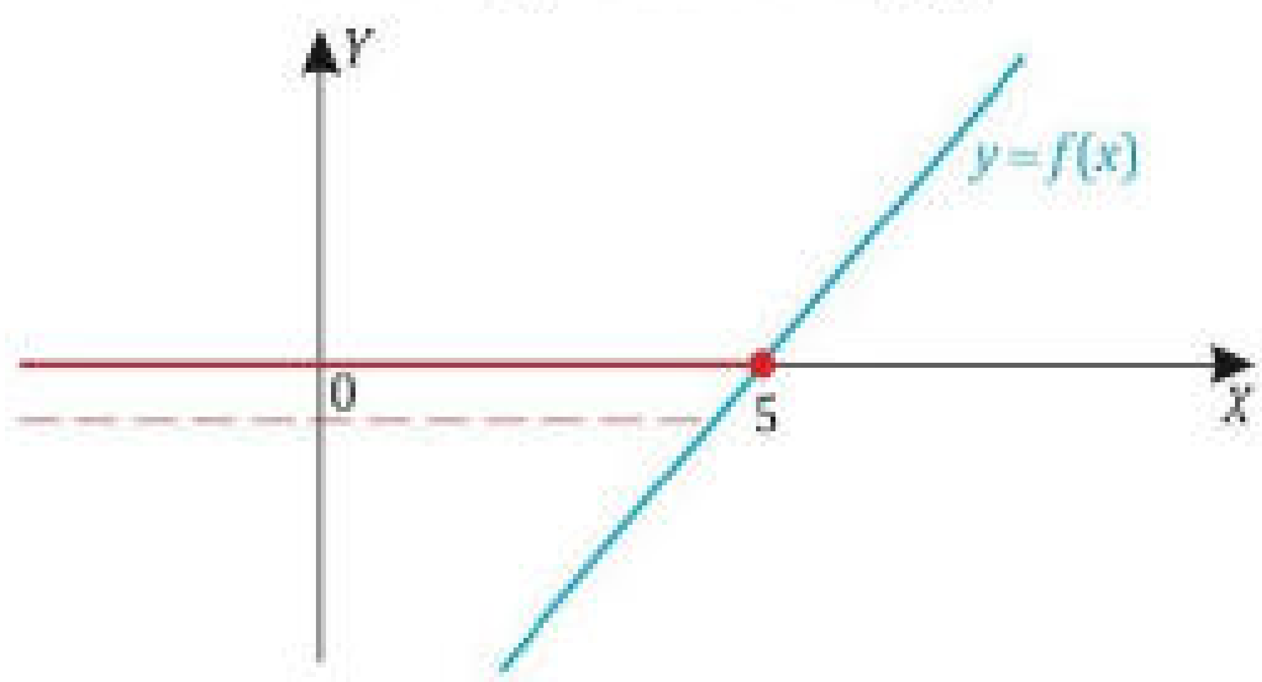
Wyznaczymy te wartości parametru p, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $px+3p^2-6p\leqslant 0$ jest przedział:

a) $(-\infty, 5\rangle$ b) $\langle 9, +\infty)$.

Rozważmy funkcję liniową $f(x)=px+3p^2-6p$.

Ad a) Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie w przedziale $(-\infty, 5\rangle$ tylko wtedy, gdy współczynnik przy x jest dodatni i jednocześnie miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5 (zobacz rysunek poniżej).

Szkic wykresu funkcji f



Mamy więc koniunkcję warunków:

$$\begin{cases} p>0 \\ f(5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p>0 \\ 5p+3p^2-6p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p>0 \\ 3p^2-p=0 \end{cases}$$

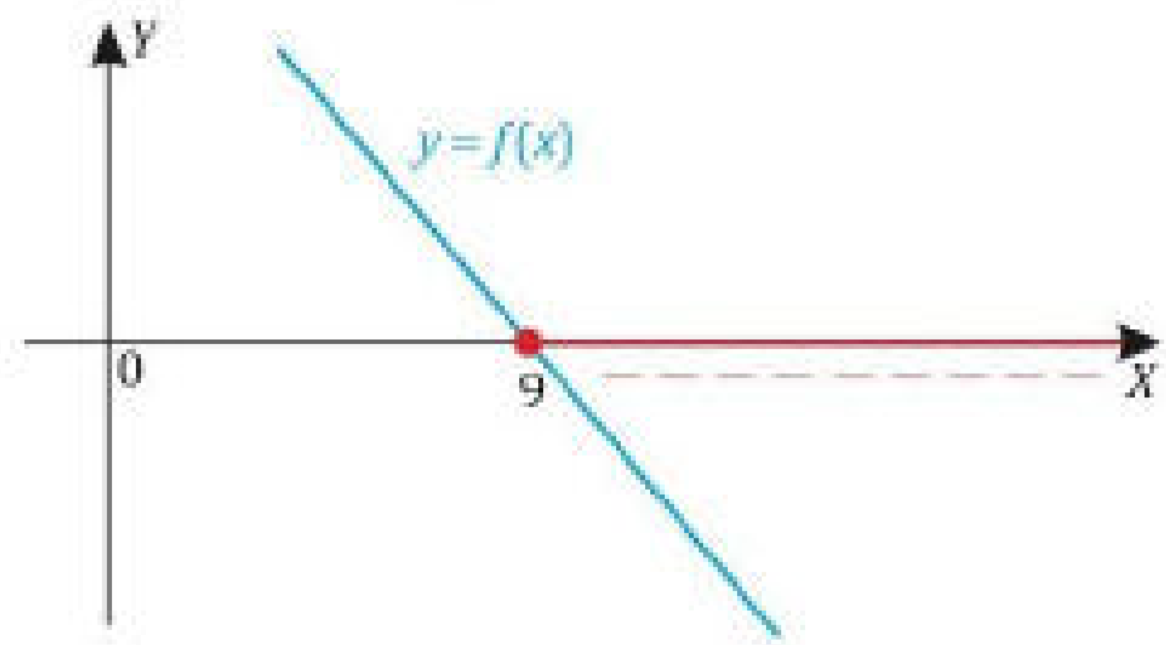
$$\begin{cases} p > 0 \\ p = 0 \ \vee \ p = \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{zatem}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $px + 3p^2 - 6p \leqslant 0$ jest przedział $(-\infty, 5\rangle$ wtedy, gdy $p = \frac{1}{3}$.

Ad b) Funkcja f będzie przyjmować wartości niedodatnie w przedziale $\langle 9, +\infty)$ tylko wtedy, gdy współczynnik przy x będzie ujemny oraz miejscem zerowym funkcji f będzie liczba 9 (zobacz rysunek poniżej).

Szkic wykresu funkcji f



Mamy więc układ warunków:

$$\begin{cases} p < 0 \\ f(9) = 0, \end{cases} \quad \text{skąd}$$

$p = -1$ (sprawdź!)

Zbiorem rozwiązań nierówności $px + 3p^2 - 6p \leqslant 0$ jest przedział $\langle 9, +\infty)$ wtedy, gdy $p = -1$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zbadaj istnienie i liczbę rozwiązań równania z parametrem m, gdzie $m \in \mathbb{R}$:
   a) $(m + 1)x = m^2 - 1$ b) $(5 - m)x = m + 5$
2. Wyznacz wartości parametru m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, dla których:
   a) rozwiązaniem równania $m^2x + 2 = 4x + m$ jest każda liczba rzeczywista
   b) zbiór rozwiązań równania $(m^2 - 9)x + m - 3 = 0$ jest pusty.
3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności $3x \leqslant 12 - 3m$:
   a) jest przedziałem $(-\infty, 1\rangle$
   b) zawiera się w przedziale $(-\infty, -2)$.