Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Pojęcie wartości bezwzględnej poznałeś w klasie pierwszej. Przypomnijmy:

$$|w| = \begin{cases} w, & \text{jeśli } w \geqslant 0 \\ -w, & \text{jeśli } w < 0 \end{cases}$$

Poznałeś też interpretację wartości bezwzględnej jako odległości między punktami na osi liczbowej. Rozwiązywałeś również proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, m. in. z wykorzystaniem następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.
Jeśli w jest dowolnym wyrażeniem, a – dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

a) $|w| = a \Leftrightarrow (w = a \vee w = -a)$

b) $|w| < a \Leftrightarrow (w > -a \wedge w < a) \Leftrightarrow -a < w < a \Leftrightarrow w \in (-a, a)$

c) $|w| \leqslant a \Leftrightarrow (w \geqslant -a \wedge w \leqslant a) \Leftrightarrow -a \leqslant w \leqslant a \Leftrightarrow w \in \langle -a, a\rangle$

d) $|w| > a \Leftrightarrow (w < -a \vee w > a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

e) $|w| \geqslant a \Leftrightarrow (w \leqslant -a \vee w \geqslant a) \Leftrightarrow w \in (-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty)$

Przykład 1.

Rozwiążemy równania:

a) $|3x + 2| = 8$

b) $\big||4x - 1| - 2\big| = 9$

W rozwiązaniu tych równań wykorzystamy twierdzenie 1a.

Ad a) Mamy:

$$|3x + 2| = 8 \Leftrightarrow (3x + 2 = 8 \vee 3x + 2 = -8) \Leftrightarrow (3x = 6 \vee 3x = -10) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = 2 \vee x = -\frac{10}{3}\right)$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 2 oraz $-3\frac{1}{3}$.

Ad b) W przypadku tego równania z twierdzenia 1a skorzystamy dwukrotnie (wskaż te miejsca!).

$$\big||4x - 1| - 2\big| = 9 \Leftrightarrow (|4x - 1| - 2 = 9 \vee |4x - 1| - 2 = -9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|4x - 1| = 11 \vee \underbrace{|4x - 1| = -7}_{\text{(równanie sprzeczne)}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x - 1 = 11 \vee 4x - 1 = -11) \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -2{,}5)$$

Równanie ma dwa rozwiązania: 3 oraz $-2{,}5$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówności:

a) $|3 - 2x| < 5$

b) $\big||3x + 6| - 7\big| \geqslant 4$

Ad a) W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia 1b:

$$|3-2x|<5 \Leftrightarrow (3-2x>-5 \wedge 3-2x<5) \Leftrightarrow (-2x>-8 \wedge -2x<2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x<4 \wedge x>-1) \Leftrightarrow x \in (-1, 4)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-1, 4)$.

Ad b) W przypadku tej nierówności dwukrotnie skorzystamy z twierdzenia 1e i raz z twierdzenia 1c (wskaż te miejsca!).

$$\left||3x+6|-7\right| \geqslant 4 \Leftrightarrow (|3x+6|-7 \leqslant -4 \vee |3x+6|-7 \geqslant 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|3x+6| \leqslant 3 \vee |3x+6| \geqslant 11) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(3x+6 \geqslant -3 \wedge 3x+6 \leqslant 3) \vee (3x+6 \leqslant -11 \vee 3x+6 \geqslant 11)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(3x \geqslant -9 \wedge 3x \leqslant -3) \vee 3x \leqslant -17 \vee 3x \geqslant 5] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[(x \geqslant -3 \wedge x \leqslant -1) \vee x \leqslant -\frac{17}{3} \vee x > \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x \in \langle -3, -1\rangle \vee x \in \left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \vee x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \cup \langle -3, -1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów
$\left(-\infty, -\frac{17}{3}\right\rangle \cup \langle -3, -1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right)$.

Omówimy teraz ogólniejszą metodę rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną, odwołującą się bezpośrednio do definicji wartości bezwzględnej. Pokażemy też zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $2|x-1| \leqslant -x+7$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. W nierówności występuje jedno wyrażenie ze znakiem wartości bezwzględnej. Po powołaniu się na definicję wartości bezwzględnej otrzymujemy

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ -x+1, & \text{jeśli } x < 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że liczba 1 (czyli liczba, dla której wyrażenie $x-1$ przyjmuje wartość 0) rozdziela dziedzinę nierówności na dwa przedziały: $(-\infty, 1)$ i $\langle 1, +\infty)$. W przedziale $(-\infty, 1)$ nierówność $2|x-1| \leqslant -x+7$ przyjmuje postać $2(-x+1) \leqslant -x+7$, a w przedziale $\langle 1, +\infty)$ – postać $2(x-1) \leqslant -x+7$. Otrzymujemy więc alternatywę warunków:

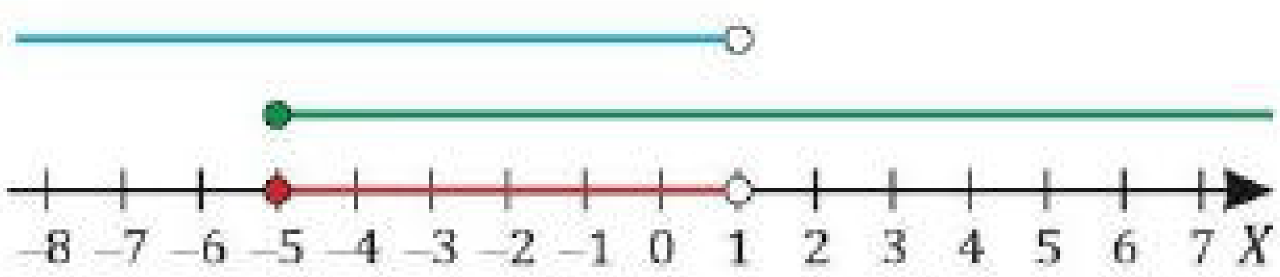
$$1^\circ \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ 2(-x+1) \leqslant -x+7 \end{cases} \quad \vee \quad 2^\circ \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 2(x-1) \leqslant -x+7 \end{cases}$$

Wystarczy teraz rozwiązać każdą nierówność, uwzględniając przedział, w którym jest określona, a następnie zsumować otrzymane zbiory rozwiązań. Mamy:

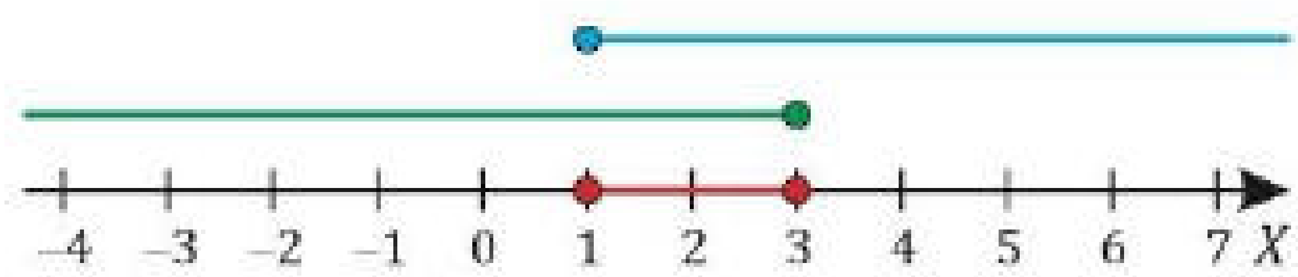
$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ -2x + 2 \leqslant -x + 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 2x - 2 \leqslant -x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ -x \leqslant 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ 3x \leqslant 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 1) \\ x \geqslant -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 1, +\infty) \\ x \leqslant 3 \end{cases}$$



$\langle -5, 1)$



$\langle 1, 3 \rangle$

Ostatecznie otrzymujemy:

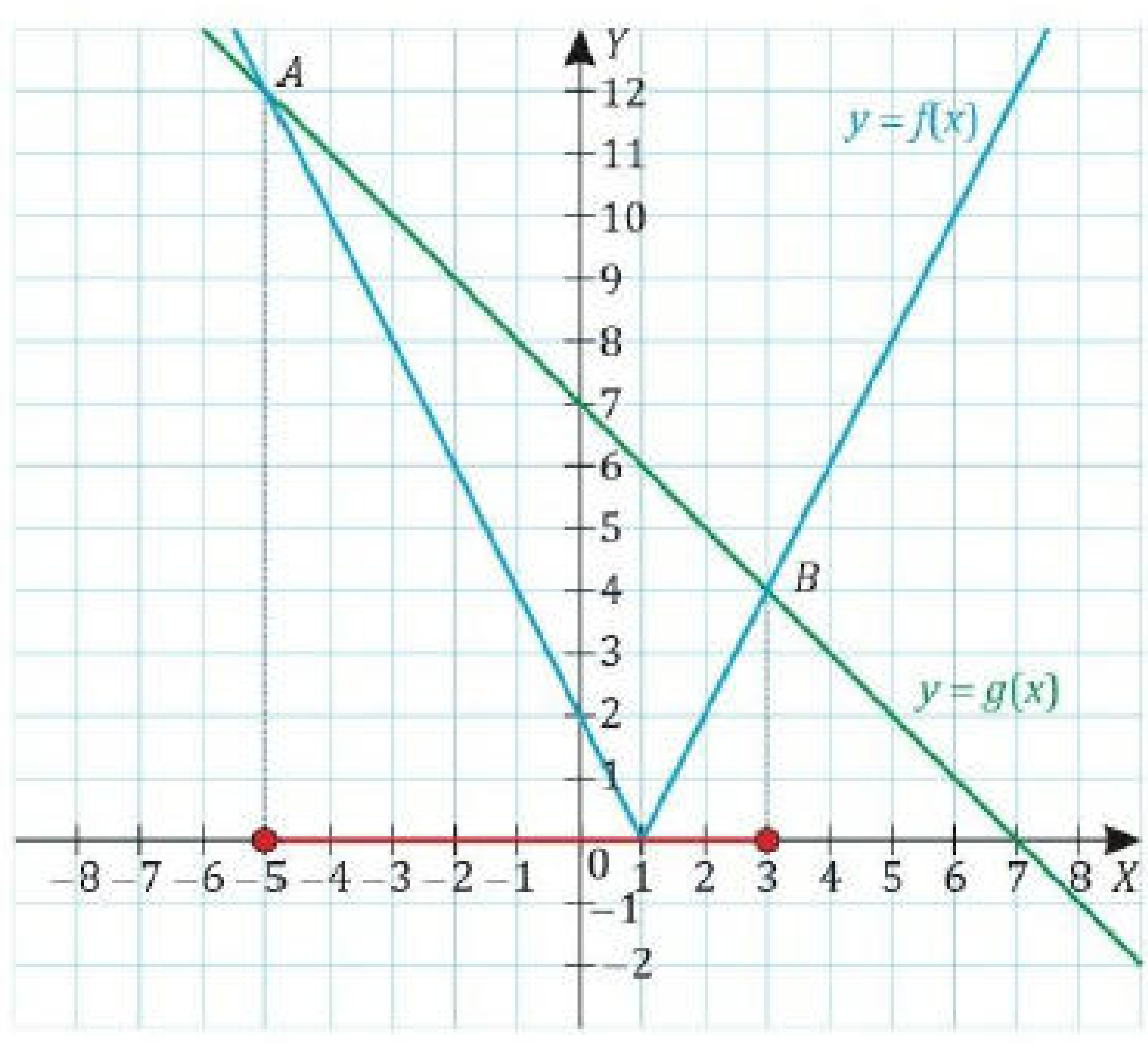
$$[x \in \langle -5, 1) \vee x \in \langle 1, 3 \rangle] \Leftrightarrow x \in \langle -5, 3 \rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2|x-1| \leqslant -x + 7$ jest przedział $\langle -5, 3 \rangle$.

Nierówność $2|x-1| \leqslant -x + 7$ można też rozwiązać, wykorzystując wykresy funkcji: $f(x) = 2|x-1|$ i $g(x) = -x + 7$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. W tym celu wystarczy ustalić, dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie większe od wartości funkcji g.
Zapisujemy wzór funkcji f bez znaku wartości bezwzględnej:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ 2(-x+1), & \text{jeśli } x < 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ -2x + 2, & \text{jeśli } x < 1 \end{cases}$$

Następnie szkicujemy wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.



Wykresy funkcji przecinają się w dwóch punktach $A(-5, 12)$ i $B(3, 4)$ (sprawdź!). Funkcja f przyjmuje nie większe wartości niż funkcja g dla argumentów z przedziału $\langle -5, 3\rangle$.

UWAGA: Wykres funkcji f można też otrzymać po odpowiednim przekształceniu wykresu funkcji $y = |x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ (wskaż te przekształcenia).

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Liczby

$$-\frac{1}{2} \text{ i } \frac{5}{3},$$

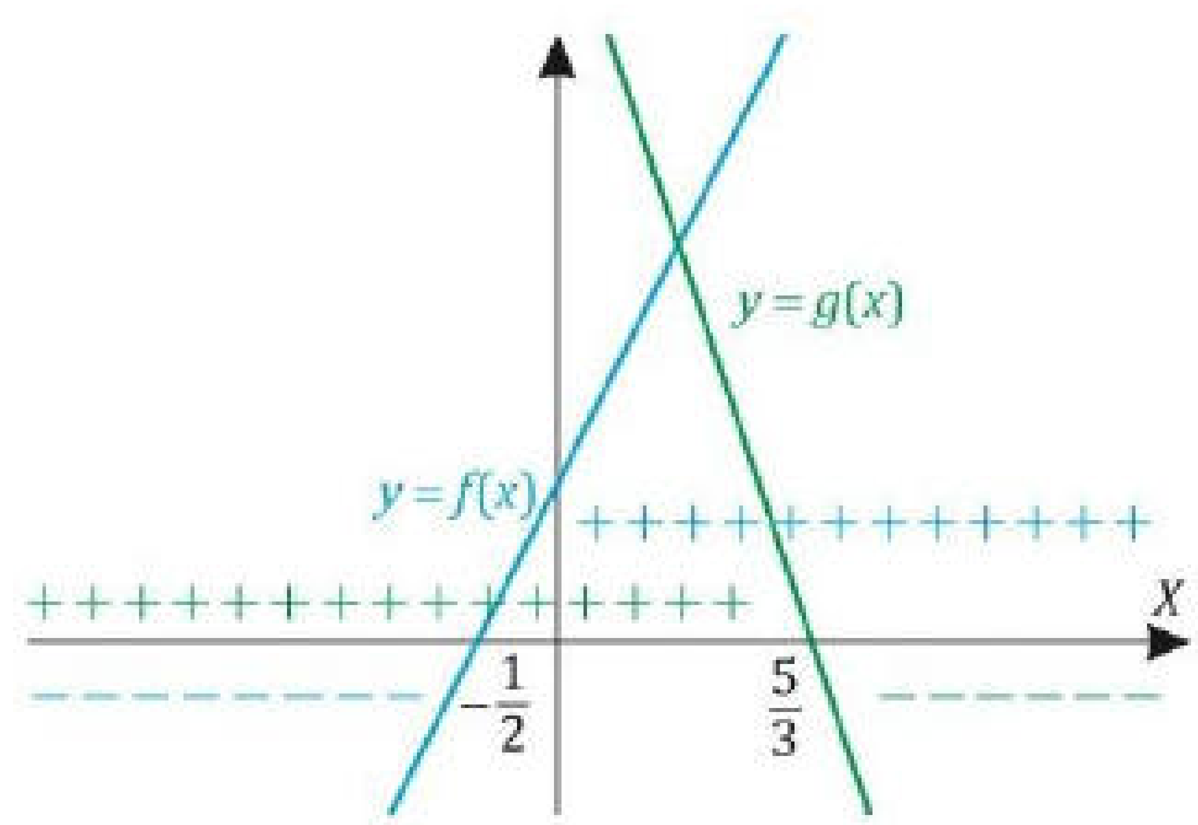
dla których wyrażenia

$$2x + 1 \text{ oraz } 5 - 3x$$

(wyrażenia „pod znakiem wartości bezwzględnej") przyjmują wartość 0, dzielą zbiór $\boldsymbol{R}$ na trzy rozłączne przedziały:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right), \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right).$$

W każdym z tych przedziałów wyrażenia $2x + 1$ oraz $5 - 3x$ przyjmują wartości o stałym znaku (czyli wartości niedodatnie albo nieujemne). Aby określić, jaki to znak, możemy posłużyć się na przykład uproszczonym szkicem wykresów funkcji $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = 5 - 3x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Mamy zatem trzy przypadki:

1° Jeśli $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, to $2x + 1 < 0$ i $5 - 3x > 0$, zatem

$$|2x + 1| = -(2x + 1) \quad \text{i} \quad |5 - 3x| = 5 - 3x.$$

2° Jeśli $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$, to $2x + 1 \geqslant 0$ i $5 - 3x > 0$, zatem

$$|2x + 1| = 2x + 1 \quad \text{i} \quad |5 - 3x| = 5 - 3x.$$

3° Jeśli $x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right)$, to $2x + 1 > 0$ i $5 - 3x \leqslant 0$, zatem

$|2x + 1| = 2x + 1$ i $|5 - 3x| = -(5 - 3x)$.

Tak więc żeby rozwiązać równanie $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$, wystarczy rozpatrzeć alternatywę następujących warunków:

$$1^\circ \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ -3(2x+1) = 2(5-3x) - 13 \end{cases} \vee$$

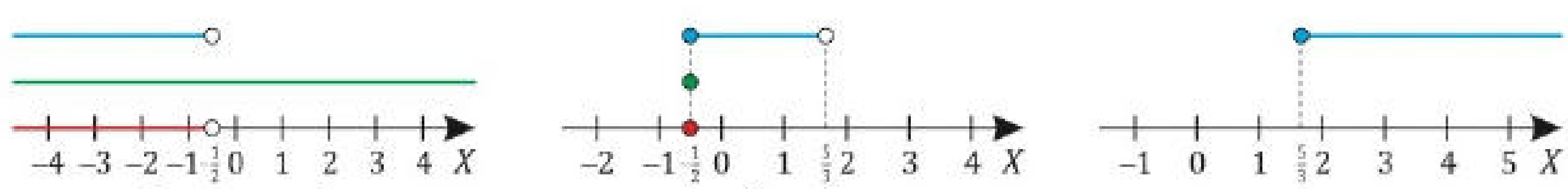
$$2^\circ \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3} \right) \\ 3(2x+1) = 2(5-3x) - 13 \end{cases} \vee$$

$$3^\circ \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right) \\ 3(2x+1) = -2(5-3x) - 13 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ -6x - 3 = 10 - 6x - 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3} \right) \\ 6x + 3 = 10 - 6x - 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right) \\ 6x + 3 = -10 + 6x - 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3} \right) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right) \\ 3 = -23 \end{cases}$$



$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \qquad \left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad \varnothing$$

Ostatecznie

$$\left[x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \vee x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right] \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Zbiorem rozwiązań równania $3|2x + 1| = 2|5 - 3x| - 13$ jest przedział $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $|x-3|-2x<-2|x+1|+11$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych. Liczby -1 i 3 dzielą zbiór $\boldsymbol{R}$ na trzy rozłączne przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 3)$ oraz $\langle 3, +\infty)$. Wystarczy więc rozważyć alternatywę trzech przypadków (przeanalizuj dokładnie każdy z nich!):

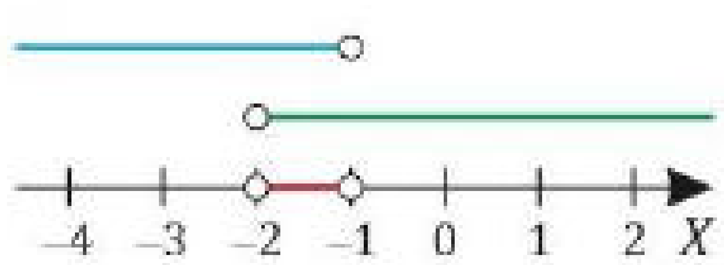
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -(x-3)-2x < 2(x+1)+11 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -(x-3)-2x < -2(x+1)+11 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ (x-3)-2x < -2(x+1)+11 \end{cases}$$

Zatem

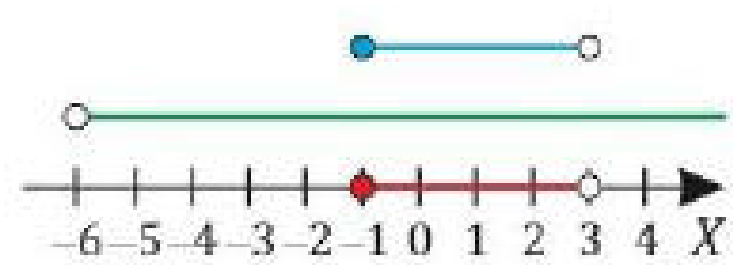
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -3x+3 < 2x+13 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -3x+3 < -2x+9 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ -x-3 < -2x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ -5x < 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ -x < 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x < 12 \end{cases}$$

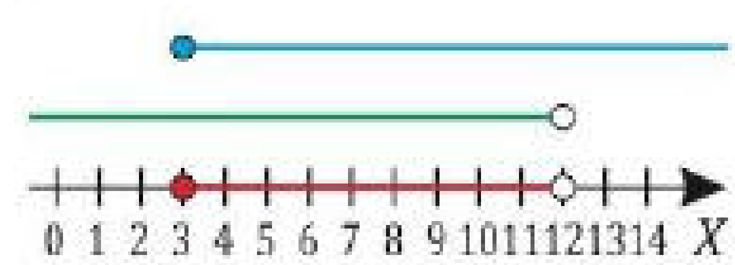
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle -1, 3) \\ x > -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x < 12 \end{cases}$$



$(-2, -1)$



$\langle -1, 3)$



$\langle 3, 12)$

Zatem

$[x \in (-2, -1) \vee x \in \langle -1, 3) \vee x \in \langle 3, 12)] \Leftrightarrow x \in (-2, 12)$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x-3|-2x<-2|x+1|+11$ jest przedział $(-2, 12)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równanie $|3x-2|=4-x$ w przedziale $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$.
2. Rozwiąż nierówność:
   a) $|2+x|<3x$ b) $|2x-1| \geqslant x+7$
3. Rozwiąż równanie:
   a) $|x+5|-2|x-3|=x$ b) $|4+x|+x=6-|x|$
4. Rozwiąż nierówność:
   a) $|x-4|+|6-2x| \leqslant x-2$ b) $|2x-2|-|7-x|>x+1$