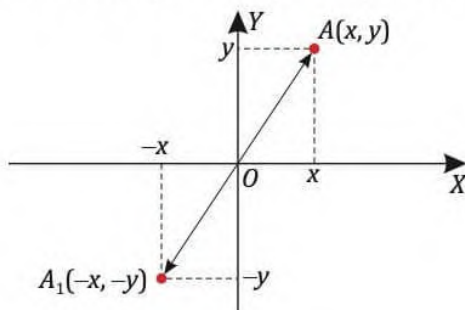


Symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$

Niech $A(x, y)$ będzie dowolnie wybranym punktem na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych. Wówczas punkt A_1 będący obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ ma współrzędne $(-x, -y)$.



Korzystając z definicji symetrii środkowej, udowodnij następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych $O(0, 0)$ jest punkt $A_1(-x, -y)$.

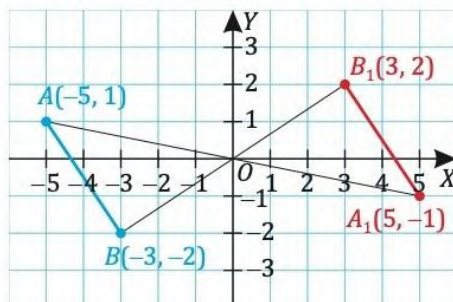
Przykład 1.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysujemy odcinek AB o końcach $A(-5, 1)$, $B(-3, -2)$. Znajdziemy obraz odcinka AB w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

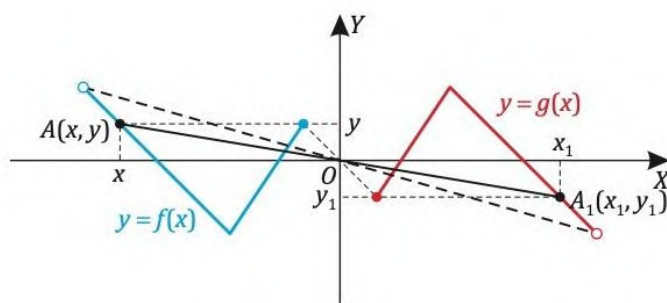
Symetria środkowa jest izometrią, więc obrazem odcinka AB jest odcinek A_1B_1 o tej samej długości. Mamy:

$$A_1 = S_{O(0,0)}(A), \text{ więc } A_1(5, -1)$$

$$B_1 = S_{O(0,0)}(B), \text{ więc } B_1(3, 2)$$



Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$, na którym dowolnie wybrano punkt $A(x, y)$. Wykres funkcji przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ i wyznaczmy wzór funkcji g , której wykres otrzymaliśmy.



Niech $A_1 = S_{O(0,0)}(A)$ i $A_1(x_1, y_1)$, więc $x_1 = -x$ i $y_1 = -y$, stąd $x = -x_1$ i $y = -y_1$. Po podstawieniu w miejsce x i y do wzoru funkcji $y = f(x)$ wyznaczonych wielkości otrzymujemy $-y_1 = f(-x_1)$, skąd

$$y_1 = -f(-x_1)$$

Wykres otrzymanej funkcji możemy zapisać w postaci $y = -f(-x)$ (aby oba wykresy można było narysować w tym samym układzie współrzędnych); mamy zatem:

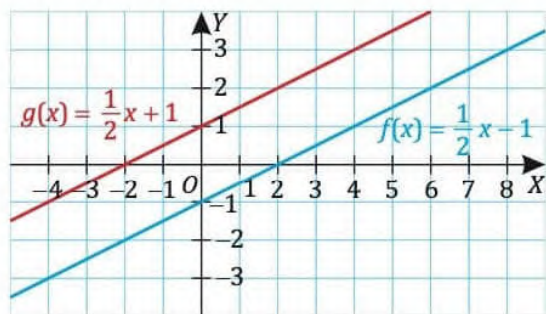
$$g(x) = -f(-x)$$

Twierdzenie 2.

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

Przykład 2.

Wykres funkcji $f(x) = 0,5x - 1$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ i otrzymano wykres funkcji g . Wyznamy wzór funkcji g i naszkicujemy jej wykres.



Po przekształceniu wykresu funkcji $f(x) = 0,5x - 1$ przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$ otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(-x)$. Zatem:

$$g(x) = -f(-x) = -[0,5(-x) - 1] = -(-0,5x - 1) = 0,5x + 1$$

Wykresy funkcji f i g przedstawia rysunek obok.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji, której wykres otrzymano. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
- Wykres funkcji $g(x) = -2x + 5$ otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu pewnej funkcji f przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f .