Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Definicja 1.
Równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x oraz y nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $ax + by = c$, przy czym a i b nie są jednocześnie zerami. Liczby rzeczywiste a, b, c nazywamy **współczynnikami równania**.

Przykładem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest równanie $3x + 2y = 4$. Mamy wówczas: $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$. Jeśli do tego równania wstawimy w miejsce x liczbę (-2), a w miejsce y – liczbę 5, to otrzymamy zdanie prawdziwe: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 4$. Jeśli natomiast w miejsce x wstawimy liczbę 5, a w miejsce y – liczbę (-2), to otrzymamy zdanie fałszywe: $3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = 4$. Powiemy, że para liczb $(-2, 5)$ spełnia równanie $3x + 2y = 4$, a para $(5, -2)$ nie spełnia danego równania. Parę liczb, która spełnia równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, nazywamy **rozwiązaniem** tego **równania**.

Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $3x + 2y = 4$? Oczywiście, że nie – jest ich dużo więcej. Wyznaczmy z równania niewiadomą y:

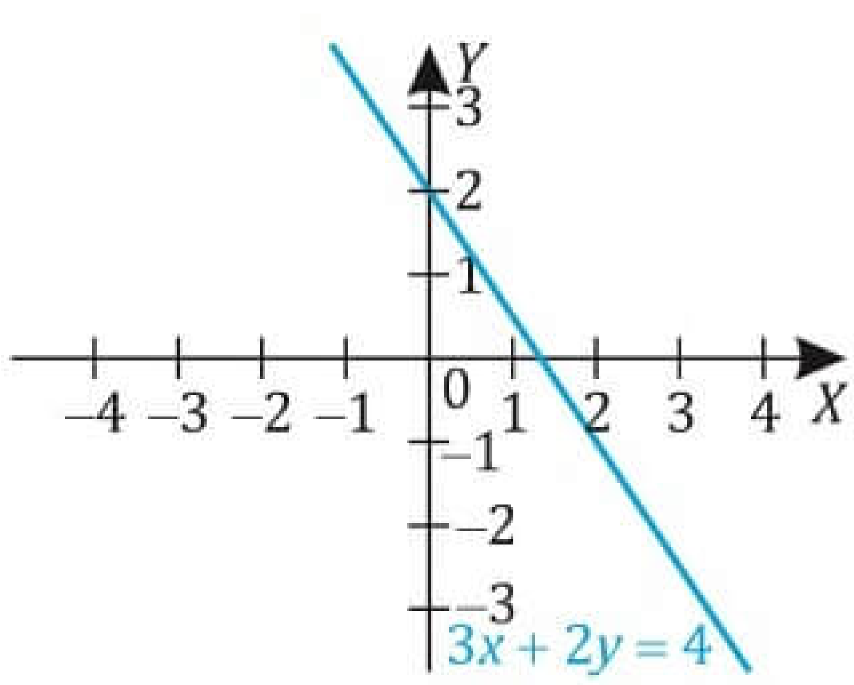
$2y = 4 - 3x \quad / : 2,$ skąd otrzymujemy

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Ta postać pozwala wyznaczyć inne rozwiązania danego równania. W miejsce x możemy wstawić dowolną liczbę rzeczywistą. Wówczas dla konkretnej wartości x niewiadoma y jest wyznaczona w sposób jednoznaczny, np. jeśli $x = 0$, to otrzymujemy $y = 2$, natomiast jeśli $x = 4$, to mamy $y = -4$. Pary $(0, 2)$ i $(4, -4)$ są kolejnymi rozwiązaniami rozpatrywanego równania. Łatwo zauważyć, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dlatego do ich interpretacji wygodnie jest posłużyć się wykresem równania.

Definicja 2.
Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y), których współrzędne spełniają to równanie.

Twierdzenie 1.
Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y jest prosta.



Wszystkie rozwiązania równania $3x + 2y = 4$ możemy opisać jako pary liczb mające postać $\left(x, -\frac{3}{2}x + 2\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

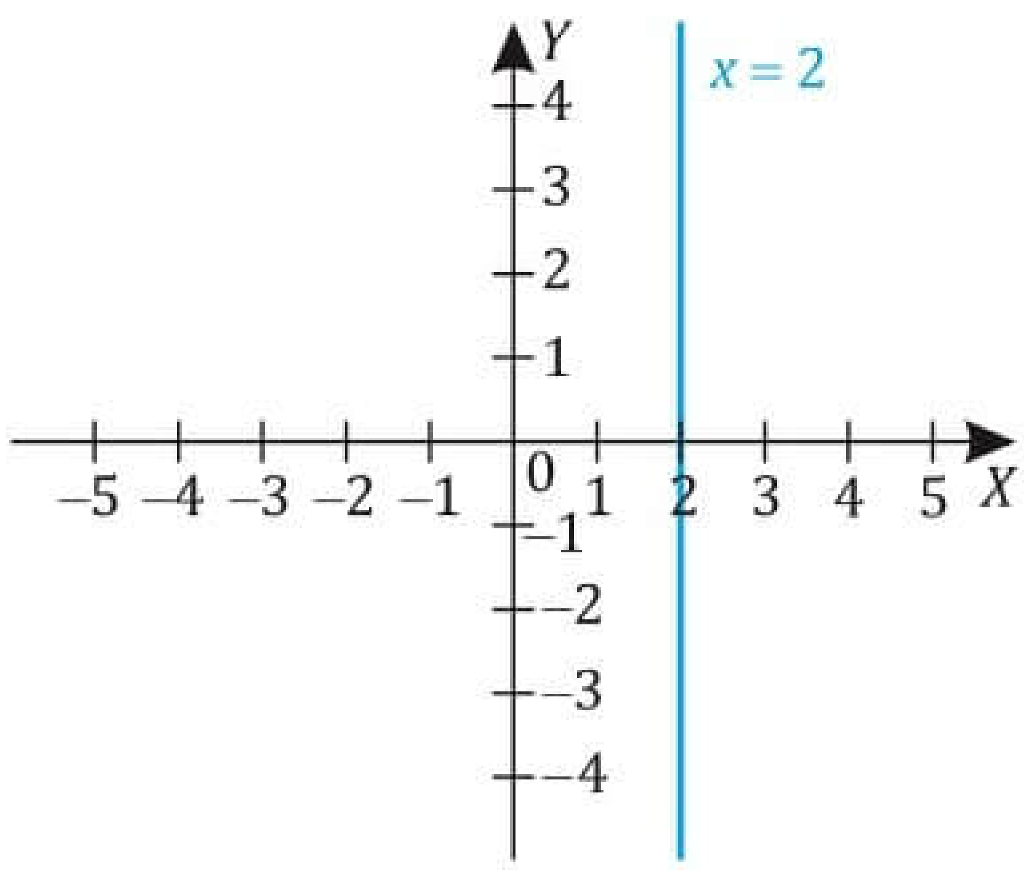
Może się zdarzyć, że w równaniu $ax + by = c$ jedna z liczb a lub b jest równa 0. Omówimy tę sytuację w poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykresy równań: a) $2x + 0y = 4$ b) $0x - y = 3$

$$2x + 0y = 4$$

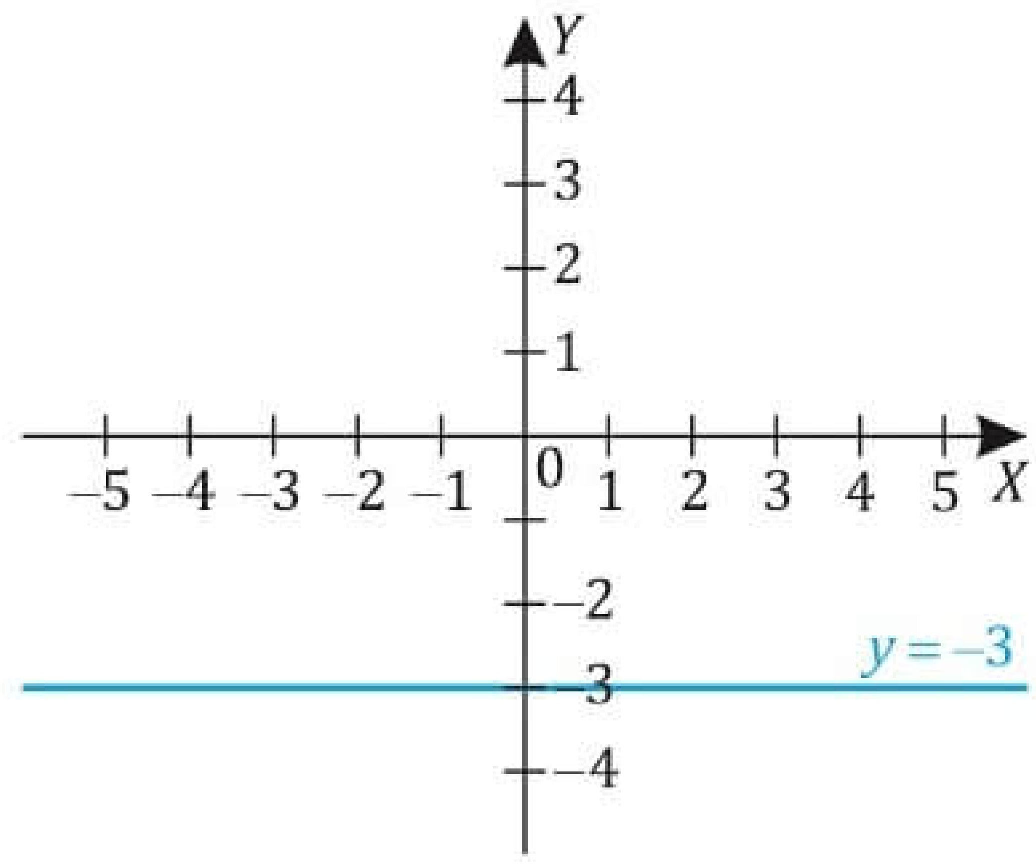
Zauważ, że $0y = 0$ dla każdej liczby y. Równanie przyjmuje postać $2x = 4$, stąd $x = 2$. Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(2, y)$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$.



Wykresem równania jest prosta $x = 2$.

$$0x - y = 3$$

W tym przypadku wykorzystamy to, że $0x = 0$ dla każdej liczby x. Równanie przyjmuje postać: $-y = 3$, stąd $y = -3$. Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(x, -3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Wykresem równania jest prosta $y = -3$.

Podsumujmy:

- Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to równanie $ax + by = c$ opisuje prostą przecinającą oś OX w punkcie $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ i oś OY w punkcie $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.
- Jeśli $a \neq 0$ i $b = 0$, to równanie $ax + 0y = c$ opisuje prostą równoległą do osi OY.
- Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie $0x + by = c$ opisuje prostą równoległą do osi OX.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podaj wszystkie pary liczb (x, y), spełniające poniższe równania:
   a) $x + 4y = 1$ b) $-3x + 2y = 0$ c) $x + 0y = -12$ d) $0x + y = 7$
2. Naszkicuj wykresy następujących równań liniowych z niewiadomymi x i y:
   a) $x + 0y = -3$ b) $x - 2y = 0$ c) $-2x + y = 1$ d) $0x + y = 5$
3. Wyznacz wszystkie wartości rzeczywiste m, dla których wykres równania:
   a) $(m - 2)x + 4y = 8$ jest prostą równoległą do osi OX;
   b) $6x + (m + 1)y = 3$ jest prostą równoległą do osi OY.