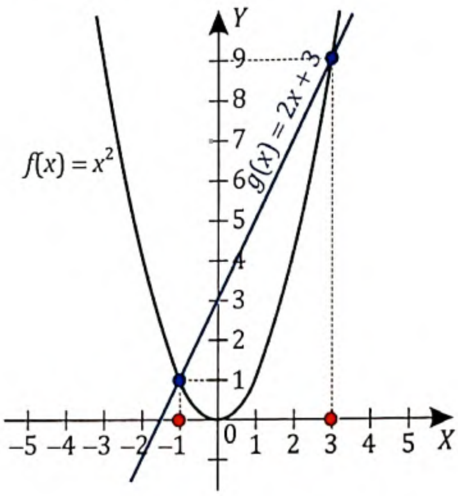
Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

Zdobyłeś już umiejętność odczytywania własności funkcji na podstawie jej wykresu. Potrafisz już naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach. Teraz nauczymy się porównywać wartości dwóch funkcji. W tym celu we wspólnym układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy dwóch różnych funkcji: $f(x) = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, oraz $g(x) = 2x + 3$, $x \in \boldsymbol{R}$, i odpowiemy na następujące pytania:

1) Dla jakich argumentów obie funkcje przyjmują te same wartości? Jakie to są wartości?
2) Dla jakich argumentów wartości funkcji g są większe od wartości funkcji f?

Oto wykresy rozważanych funkcji:



Ad 1) Wykresy funkcji f oraz g przecinają się w dwóch punktach: $(-1, 1)$ oraz $(3, 9)$. Powyższy fakt możemy potwierdzić, wykonując odpowiednie obliczenia. Wystarczy podstawić do wzorów funkcji kolejno argumenty (-1) oraz 3 i obliczyć wartości funkcji dla tych argumentów:

- jeśli $x = -1$

  $f(-1) = (-1)^2 = 1 \qquad g(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$, więc

  $f(-1) = g(-1) = 1$

- jeśli $x = 3$

  $f(3) = 3^2 = 9 \qquad g(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$, więc

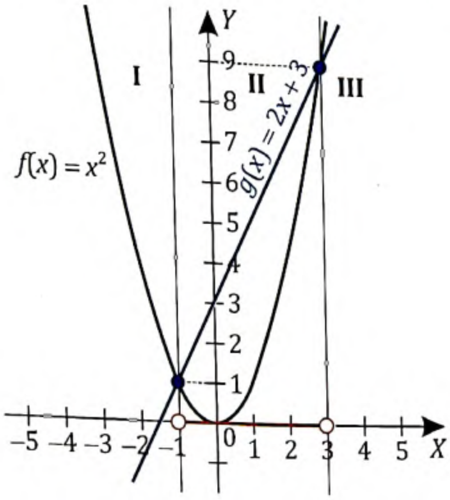
  $f(3) = g(3) = 9$

Można pokazać, że rozpatrywane wykresy przecinają się tylko w dwóch wyznaczonych punktach, zatem nasze spostrzeżenia możemy zapisać krótko w następujący sposób:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 3)$$

Ad 2) Mamy wyznaczyć wszystkie te argumenty x, dla których wartości funkcji g są większe od wartości funkcji f, czyli odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x zachodzi nierówność $g(x) > f(x)$?"

Zauważ, że punkty, w których przecinają się wykresy obu funkcji, dzielą te wykresy na charakterystyczne części, w taki sposób, że wykres jednej z nich znajduje się nad wykresem drugiej. Aby lepiej to zrozumieć, podzielmy rysunek na trzy części I, II, III, prostymi prostopadłymi do osi OX, przechodzącymi przez punkty wspólne obu wykresów.

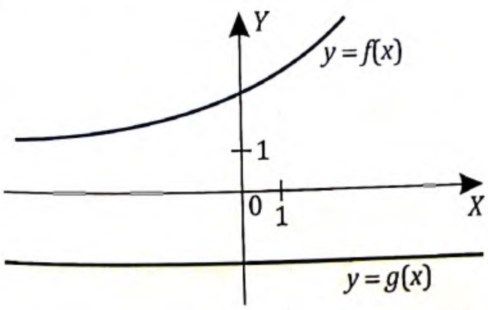


W części I oraz III wykres funkcji f znajduje się nad wykresem funkcji g, co oznacza, że funkcja f osiąga wartości większe niż funkcja g.
W części II wykres funkcji g znajduje się nad wykresem funkcji f, co oznacza, że funkcja g osiąga większe wartości niż funkcja f. Teraz należy odczytać na osi OX zbiór wszystkich tych argumentów, dla których ta sytuacja ma miejsce.
Możemy już odpowiedzieć na postawione pytanie:

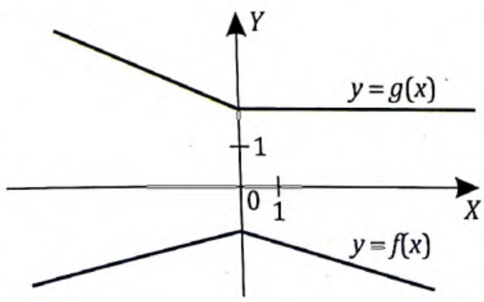
$$g(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Jak zatem porównać wartości funkcji, których wykresy nie przecinają się? Otóż ten problem rozwiązać jest znacznie łatwiej. Na poniższych rysunkach przedstawiona jest taka sytuacja.

a)



b)



Funkcje f oraz g nie przyjmują równych wartości (bo ich wykresy się nie przecinają).

Ad a) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$
(bo cały wykres funkcji f znajduje się nad wykresem funkcji g).

Ad b) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R}$
(bo cały wykres funkcji f znajduje się pod wykresem funkcji g).

Umiejętność porównywania wartości dwóch funkcji pozwala nam rozwiązywać graficznie równania i nierówności. Znając wykresy funkcji podstawowych, możemy nawet rozwiązywać równania i nierówności, których jeszcze nie potrafimy rozwiązać algebraicznie (rachunkiem).

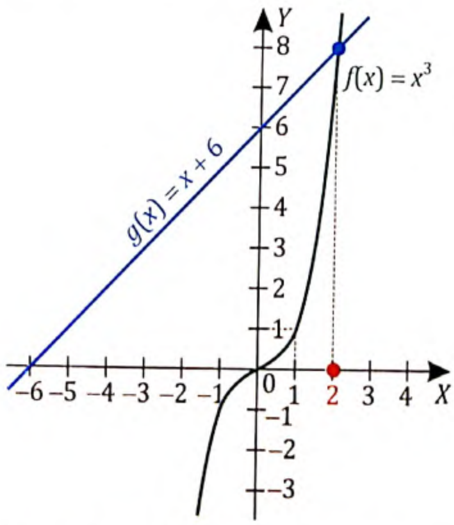
Przykład 1.

Posługując się wykresami odpowiednio dobranych funkcji, rozwiążemy równanie $x^3 = x + 6$.

Równanie $x^3 = x + 6$ możemy interpretować jako pytanie: „Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$, są równe wartościom funkcji $g(x) = x + 6$, $x \in \boldsymbol{R}$?".

Aby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy:
- przedstawić we wspólnym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji;
- znaleźć punkty wspólne wykresów funkcji (o ile istnieją);
- odczytać z rysunku i zaznaczyć na osi OX wszystkie te argumenty x, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość;
- sprawdzić rachunkowo, czy dla odczytanych argumentów x wartości funkcji są równe;
- sformułować odpowiedź.

Oto rozwiązanie zadania:



$f(2) = 2^3 = 8$

$g(2) = 2 + 6 = 8$

$f(2) = g(2)$

Rozwiązaniem równania jest liczba 2.

Przykład 2.

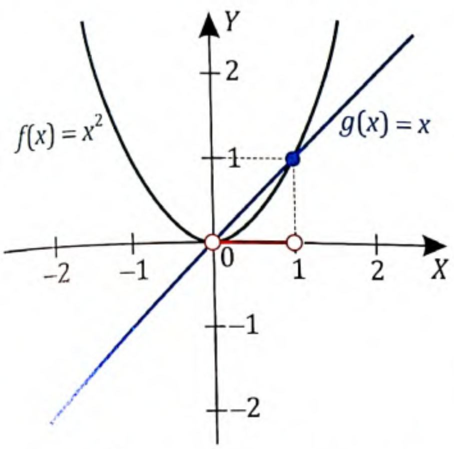
Posługując się wykresami odpowiednio dobranych funkcji, rozwiążemy nierówność $x^2 < x$.

Rozwiązać nierówność $x^2 < x$ to odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x wartości funkcji $f(x) = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$?".

W tym celu wystarczy:

- przedstawić we wspólnym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji;
- znaleźć punkty wspólne wykresów obu funkcji (o ile istnieją);
- odczytać z rysunku wszystkie te argumenty x, dla których funkcje f i g przyjmują tę samą wartość;
- sprawdzić rachunkiem, czy dla odczytanych argumentów x równość funkcji zachodzi;
- znaleźć te fragmenty wykresu funkcji f, które znajdują się pod wykresem funkcji g;
- odczytać i zaznaczyć na osi OX zbiór wszystkich argumentów, dla których zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$;
- sformułować odpowiedź.

Oto rozwiązanie zadania:



$f(0) = g(0) = 0$

$f(1) = g(1) = 1$

$x^2 < x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(0, 1)$.

UWAGA: Rozwiązywanie równań i nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji wymaga szczególnej staranności przy szkicowaniu wykresów.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Sprawdź, dla jakich argumentów: 1) wartości obu funkcji są równe; 2) wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g.
   a) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2 - x$
   b) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$
2. Posługując się wykresami odpowiednio dobranych funkcji, rozwiąż równanie:
   a) $2x + 5 = -3x - 5$
   b) $x^2 = |x|$
3. Posługując się wykresami odpowiednio dobranych funkcji, rozwiąż nierówność:
   a) $|x| \geqslant \frac{1}{2}x + 3$
   b) $x^2 < x + 2$