Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$

Załóżmy, że dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Aby naszkicować wykres funkcji $y = |f(x)|$, posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. Mamy:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{jeśli } f(x) < 0 \end{cases}$$

Równość $|f(x)| = f(x)$, jeśli $f(x) \geqslant 0$, oznacza, że dla wszystkich argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, wykresy funkcji $y = |f(x)|$ i $y = f(x)$ się pokrywają.

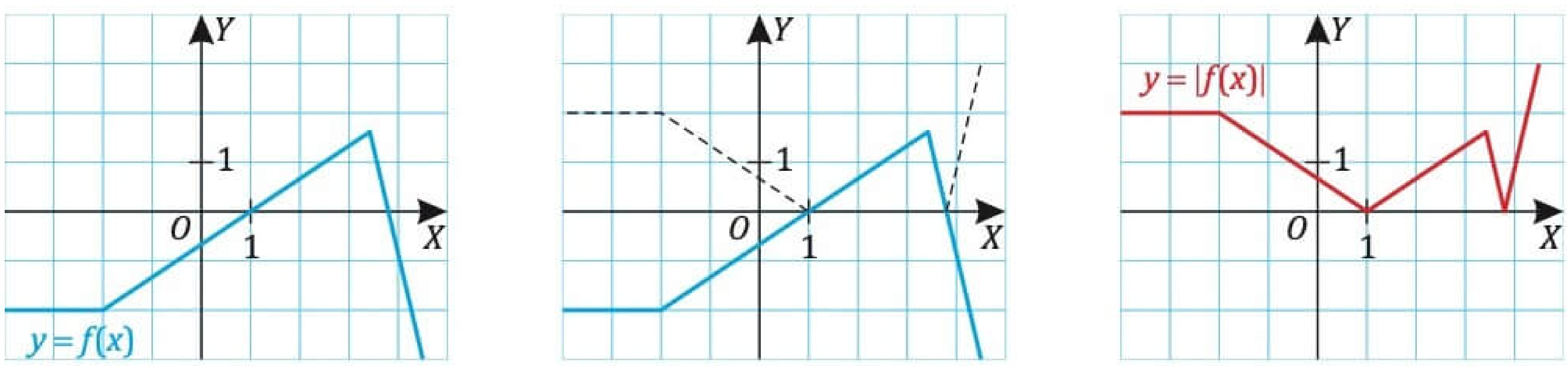
Równość $|f(x)| = -f(x)$, jeśli $f(x) < 0$, oznacza, że dla wszystkich argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = -f(x)$ (czyli z odbiciem symetrycznym wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX).

Z tego wynika, że aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, wystarczy:

1) tę część wykresu, która leży nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian;

2) tę część wykresu, która leży poniżej osi OX, przekształcić przez symetrię osiową względem osi OX.

Oto etapy takiego przekształcenia:



Omówimy teraz jak, mając wykres funkcji $y = f(x)$, otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$. Podobnie jak poprzednio odwołamy się do definicji wartości bezwzględnej. Mamy:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \geqslant 0 \\ f(-x), & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$$

Równość $f(|x|) = f(x)$, jeśli $x \geqslant 0$, oznacza, że dla wszystkich argumentów nieujemnych wykresy funkcji $y = f(|x|)$ i $y = f(x)$ pokrywają się.

Równość $f(|x|) = f(-x)$, jeśli $x < 0$, oznacza, że dla wszystkich argumentów ujemnych, wykres funkcji $y = f(|x|)$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = f(-x)$ (czyli z odbiciem symetrycznym wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY).

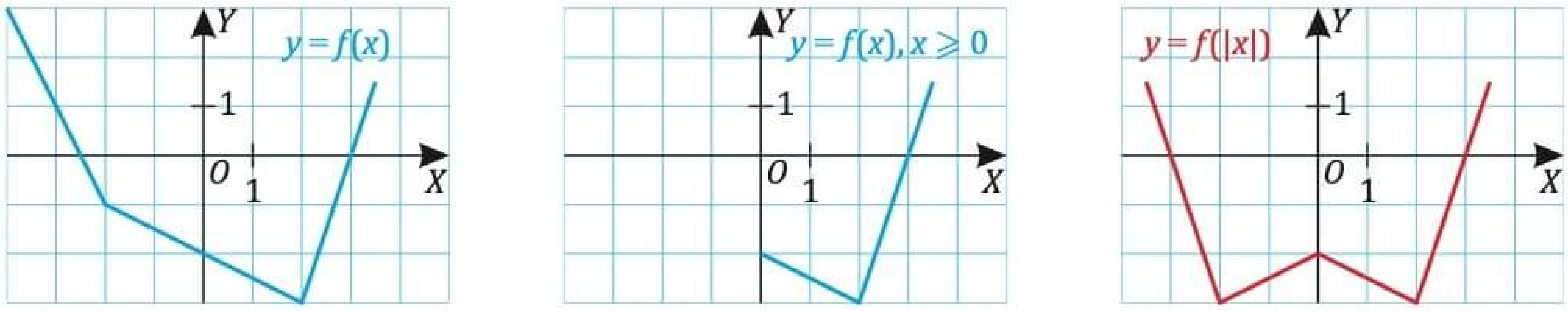
Z tego wnioskujemy, że aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$ na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$, wystarczy:

1) tę część wykresu funkcji $y = f(x)$, która odpowiada argumentom nieujemnym pozostawić bez zmiany;

2) otrzymaną w punkcie 1) część wykresu odbić symetrycznie względem osi OY;

3) wyznaczyć zbiór będący sumą wykresów znalezionych w punkcie 1) i 2).

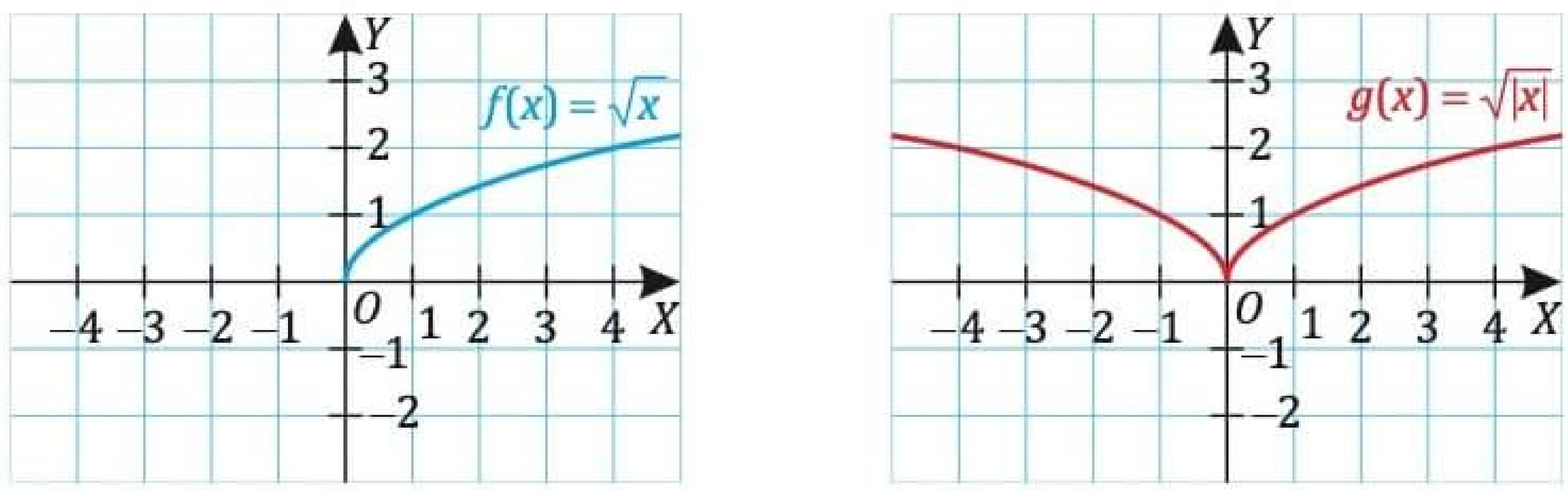
Oto etapy takiego przekształcenia:



Zauważ, że funkcja $y = f(|x|)$ jest funkcją parzystą.

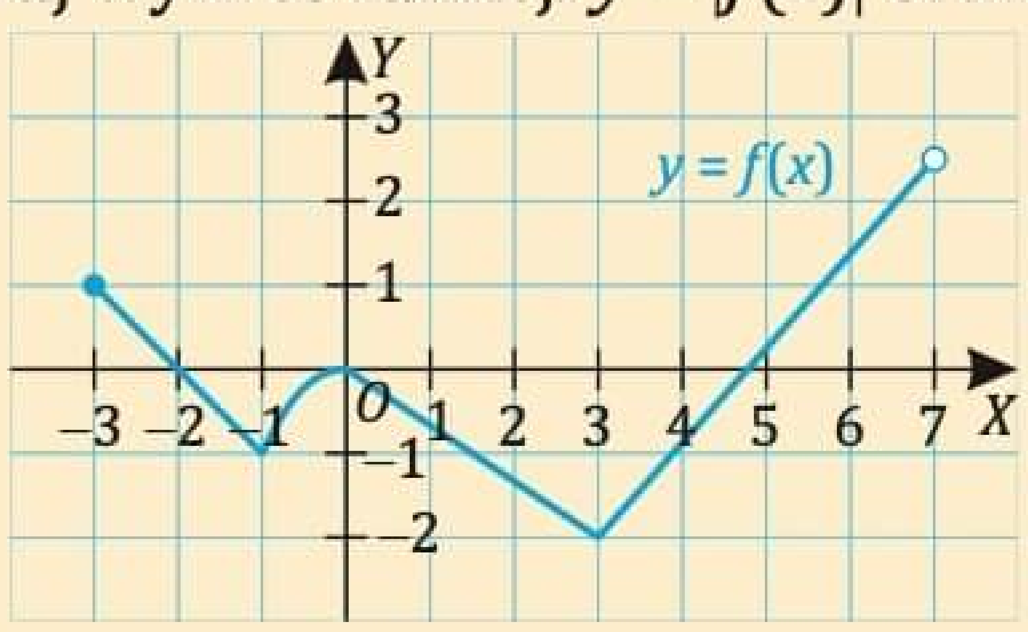
Przykład 2.

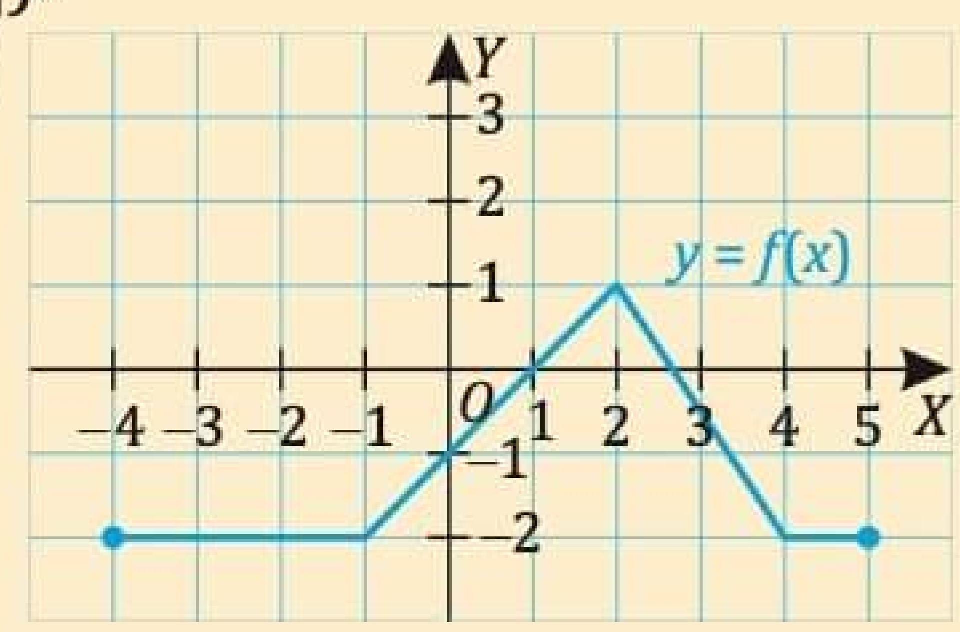
Na poniższych rysunkach przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ oraz $g(x) = f(|x|)$.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na podstawie wykresu funkcji f, przedstawionego na poniższym rysunku, narysuj wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$.

   a) 

   b) 

2. Wiadomo, że dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2, 10)$. Podaj dziedzinę funkcji określonej wzorem:

   a) $y = |f(x)|$ b) $y = f(|x|)$.

3. Wiadomo, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-5, 7\rangle$.

   a) Podaj zbiór wartości funkcji $y = |f(x)|$.

   b) Co można powiedzieć o zbiorze wartości funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(|x|)$?

4. Naszkicuj wykresy funkcji:

   a) $g(x) = |x^3|$ b) $h(x) = |\operatorname{sgn} x|$ c) $t(x) = |x|^2$ d) $r(x) = [|x|]$.