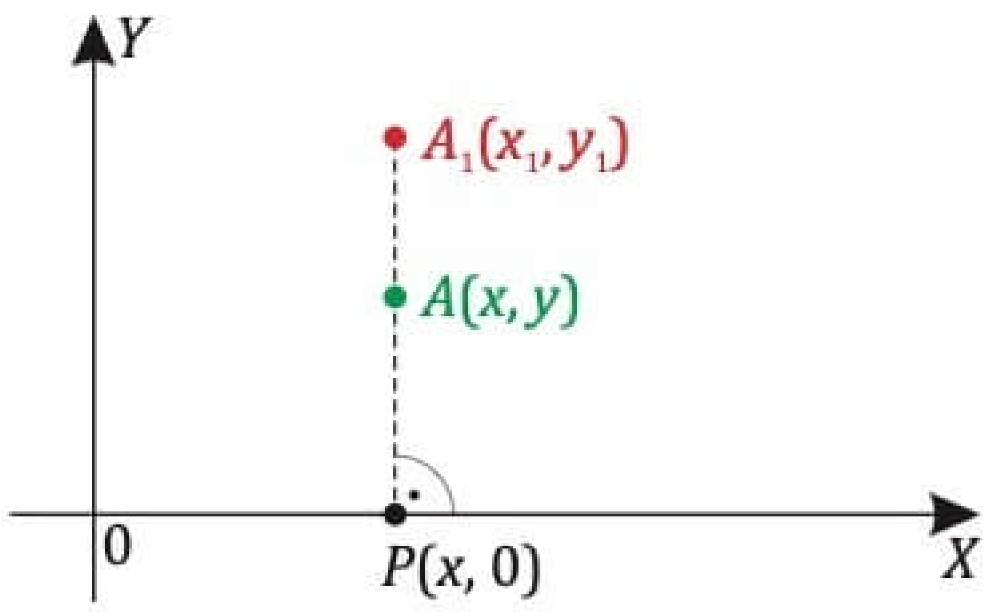
Powinowactwo prostokątne o osi *OX* i o osi *OY*

Powinowactwo prostokątne o osi *OX*

Niech dany będzie punkt $A(x, y)$ i jego rzut prostokątny na oś OX – punkt $P(x, 0)$. Rozważmy punkt $A_1(x_1, y_1)$ – obraz punktu A w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k, $k \neq 0$.



Wiemy, że wówczas

$\overrightarrow{PA_1} = k \cdot \overrightarrow{PA}$, czyli

$[x_1 - x, y_1] = k \cdot [0, y]$

$[x_1 - x, y_1] = [0, k \cdot y]$, zatem

$x_1 - x = 0 \ \wedge \ y_1 = k \cdot y$

$x_1 = x \ \wedge \ y_1 = k \cdot y$

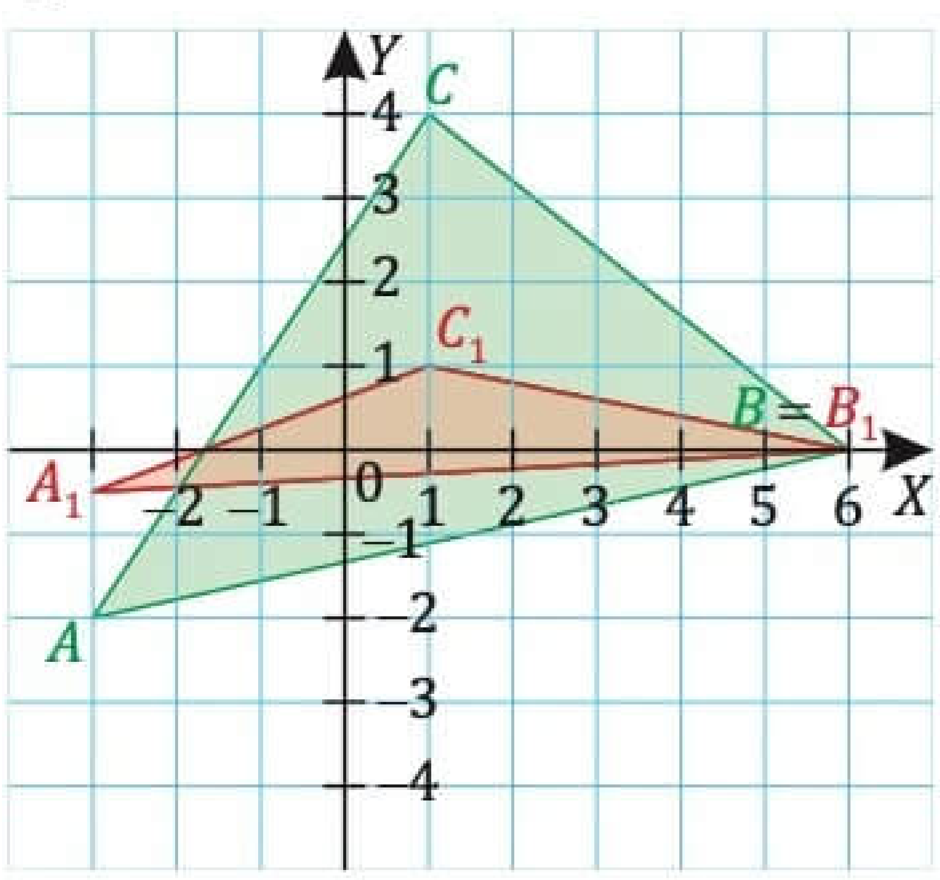
Otrzymaliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 1.
W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k, $k \neq 0$, jest punkt $A_1(x, k \cdot y)$.

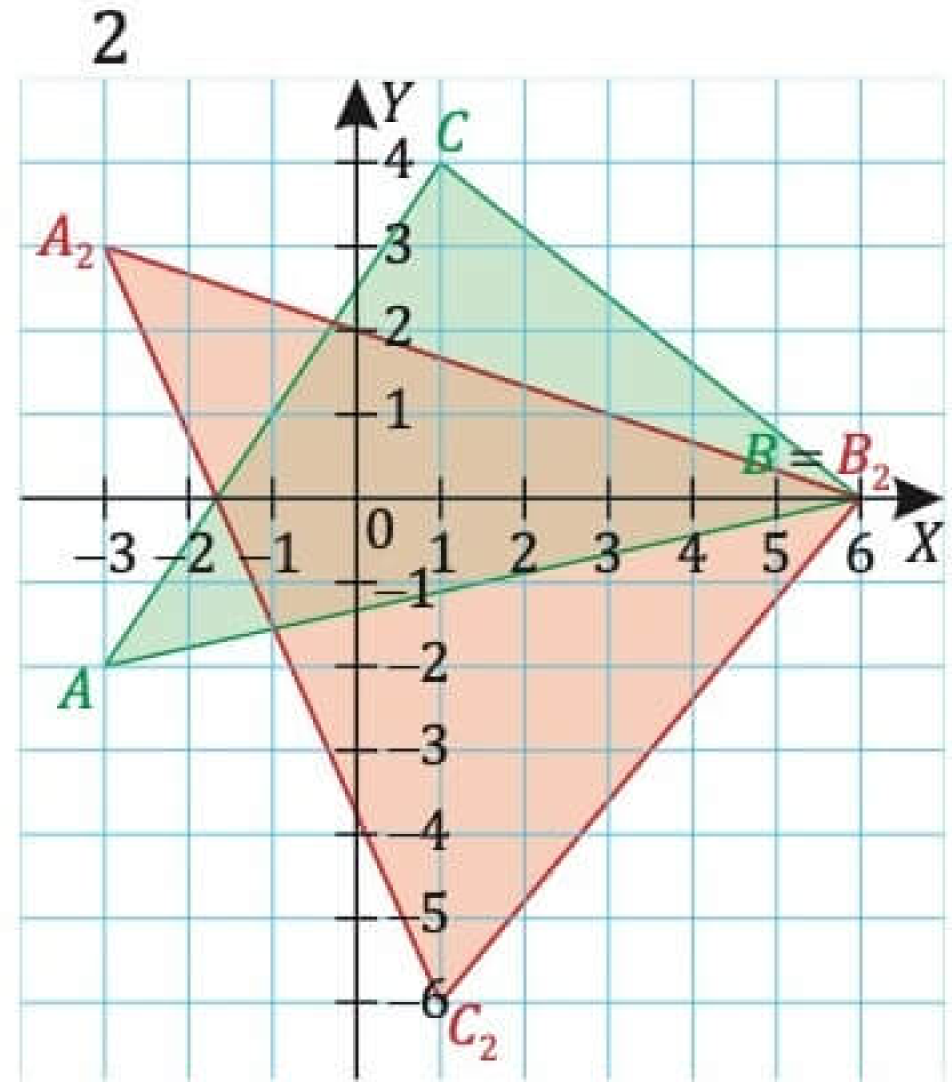
Przykład 1.

W układzie współrzędnych narysujemy trójkąt ABC, w którym $A(-3, -2)$, $B(6, 0)$, $C(1, 4)$. Wyznaczymy obraz tego trójkąta w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali:

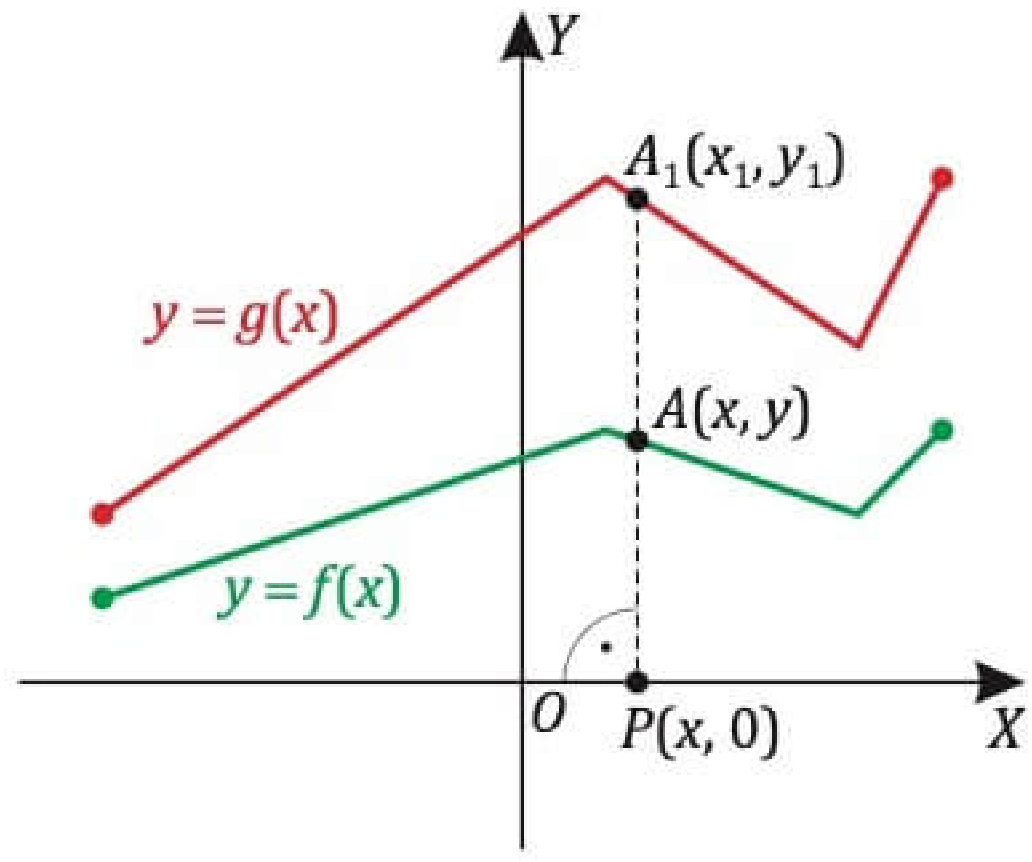
a) $\frac{1}{4}$



b) $-\frac{3}{2}$



Rozważmy wykres funkcji $y = f(x)$. Wykres ten przekształcono przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali k. Ustalimy wzór funkcji g, której wykres otrzymaliśmy.



Na wykresie funkcji f wybieramy dowolny punkt $A(x, y)$. Jego obrazem we wskazanym powinowactwie jest punkt $A_1(x_1, y_1)$. Między współrzędnymi punktów A i A_1 zachodzą następujące zależności:

$x_1 = x \wedge y_1 = k \cdot y$, czyli

$x = x_1 \wedge y = \frac{1}{k} \cdot y_1$

Po podstawieniu w miejsce x i y wyznaczonych wielkości do wzoru funkcji $y = f(x)$, otrzymujemy:

$\frac{1}{k} \cdot y_1 = f(x_1)$, skąd

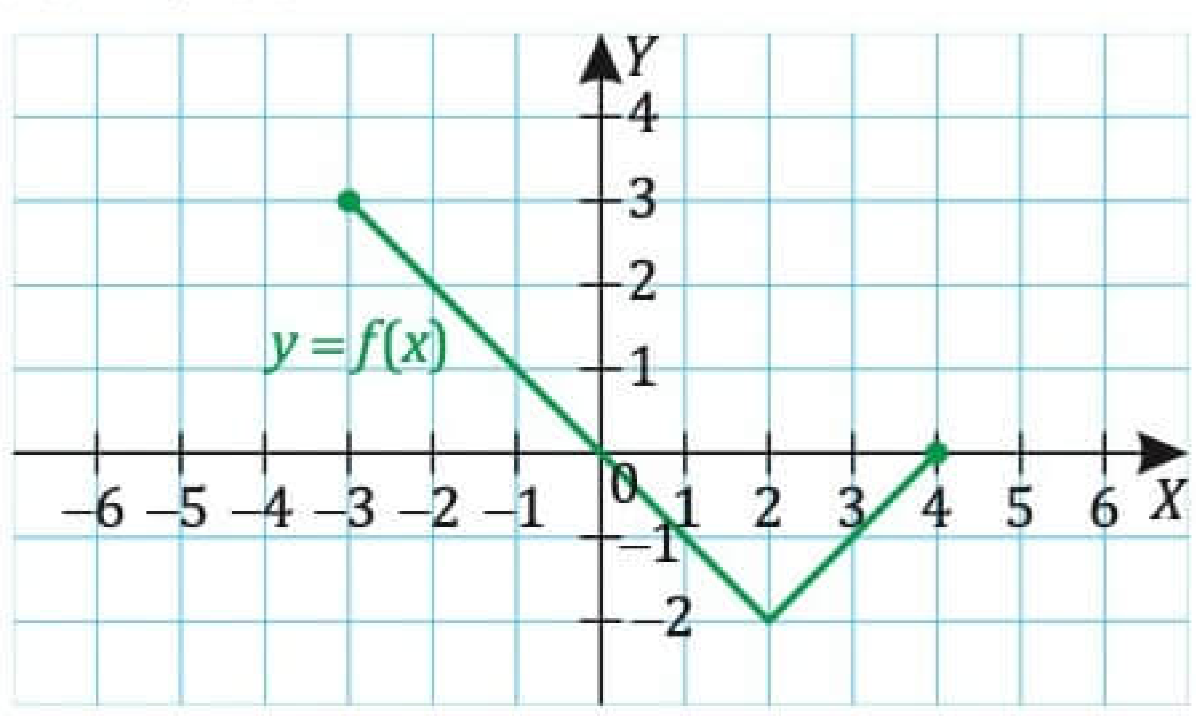
$y_1 = k \cdot f(x_1)$, zatem możemy zapisać

$g(x) = k \cdot f(x)$

Twierdzenie 2.
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$, powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi OX i skali k.

Przykład 2.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.

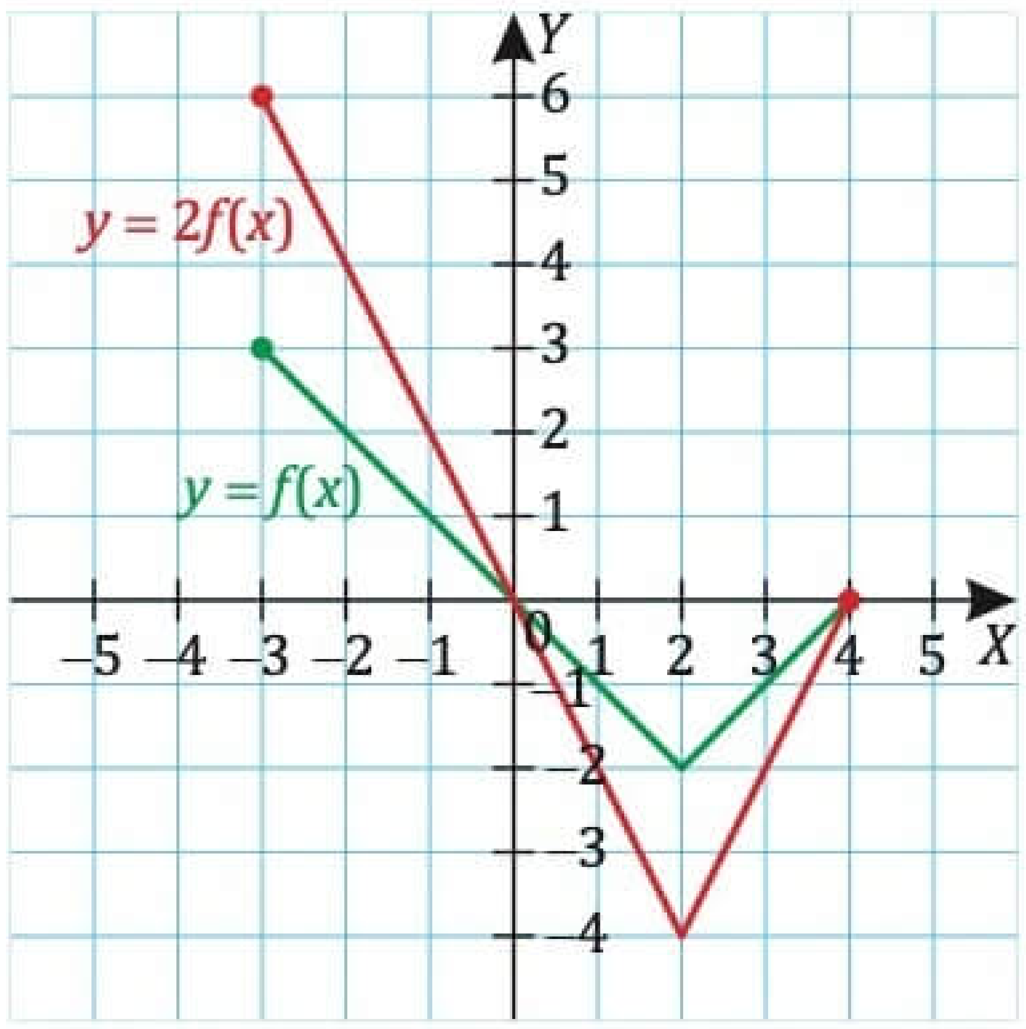


Naszkicujemy wykresy funkcji:

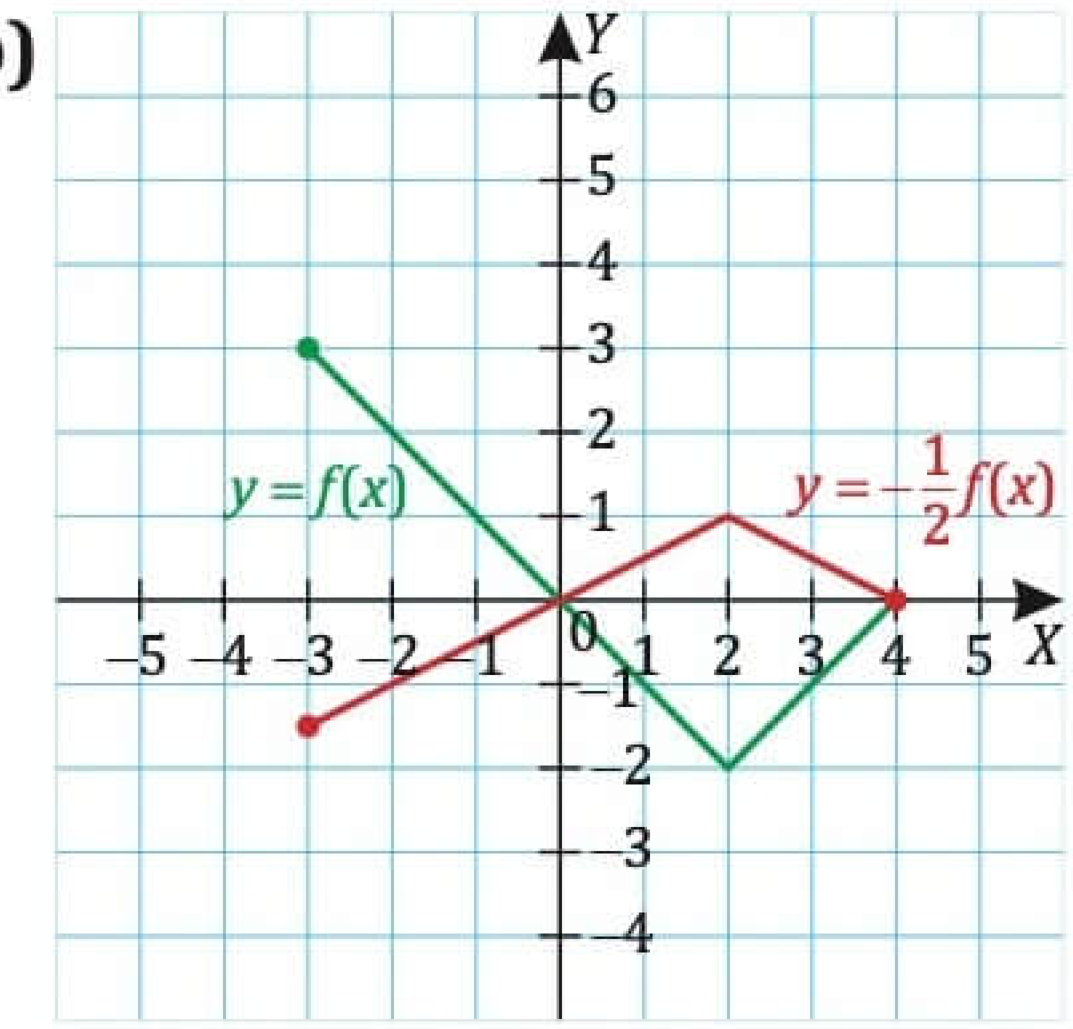
a) $y = 2f(x)$

b) $y = -\frac{1}{2} f(x)$

Ad a)

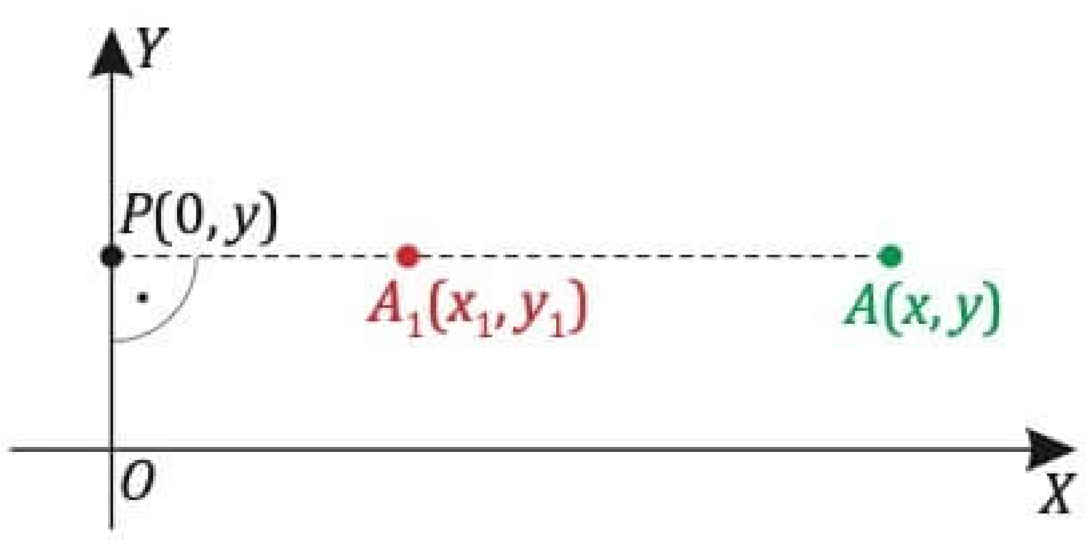


Ad b)



Powinowactwo prostokątne o osi *OY*

Niech dany będzie punkt $A(x, y)$. Rozważmy punkt $A_1(x_1, y_1)$ – obraz punktu A w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali k, $k \neq 0$.



Postępując analogicznie jak w przypadku powinowactwa prostokątnego o osi OX, można wykazać, że:

$$x_1 = k \cdot x \wedge y_1 = y$$

Twierdzenie 3.
W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali k, $k \neq 0$, jest punkt $A_1(k \cdot x, y)$.

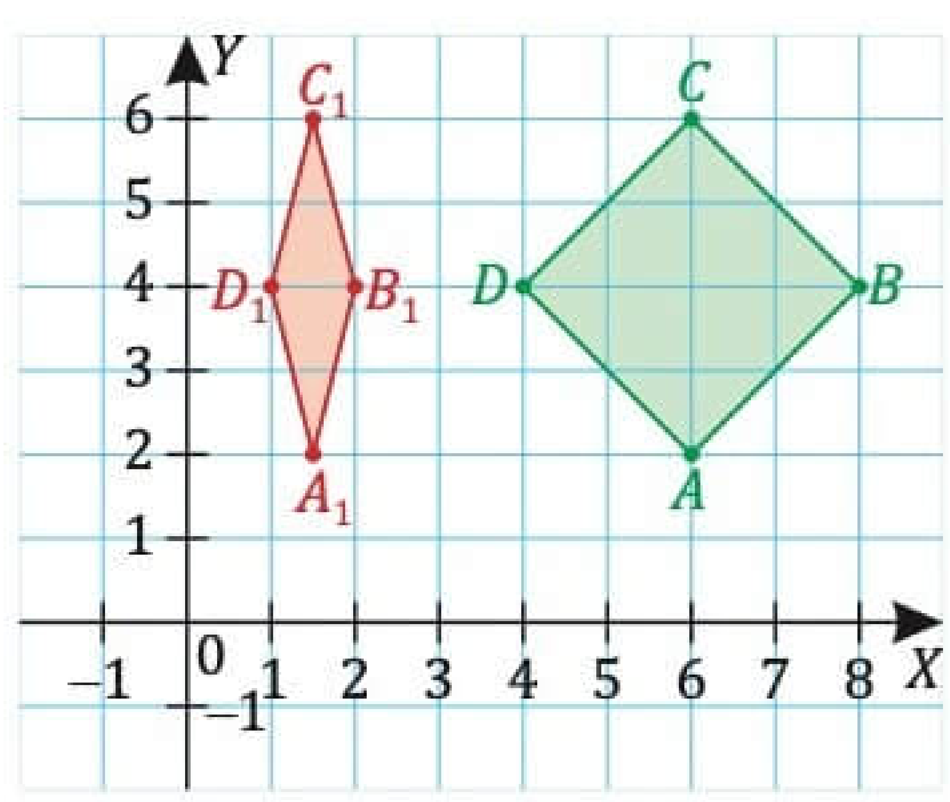
Przykład 3.

W układzie współrzędnych narysujemy kwadrat $ABCD$, w którym $A(6, 2)$, $B(8, 4)$, $C(6, 6)$, $D(4, 4)$. Wyznaczymy obraz tego kwadratu w powinowactwie prostokątnym o osi OY i skali:

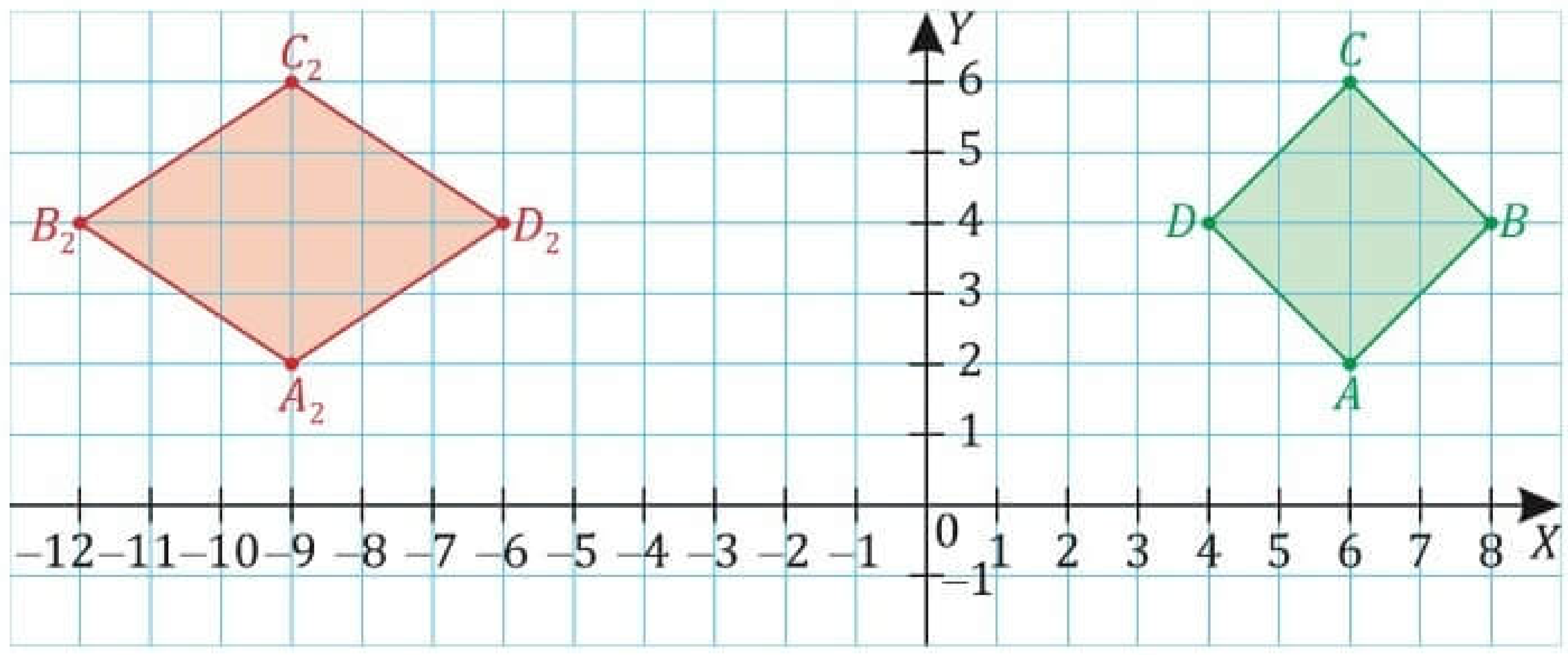
a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{3}{2}$

Ad a)



Ad b)



Twierdzenie 4.

Wykres funkcji $y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$, $k \neq 0$, powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi OY i skali k.

UWAGA: Z twierdzenia 4. wynika, że wykres funkcji

$$y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$$

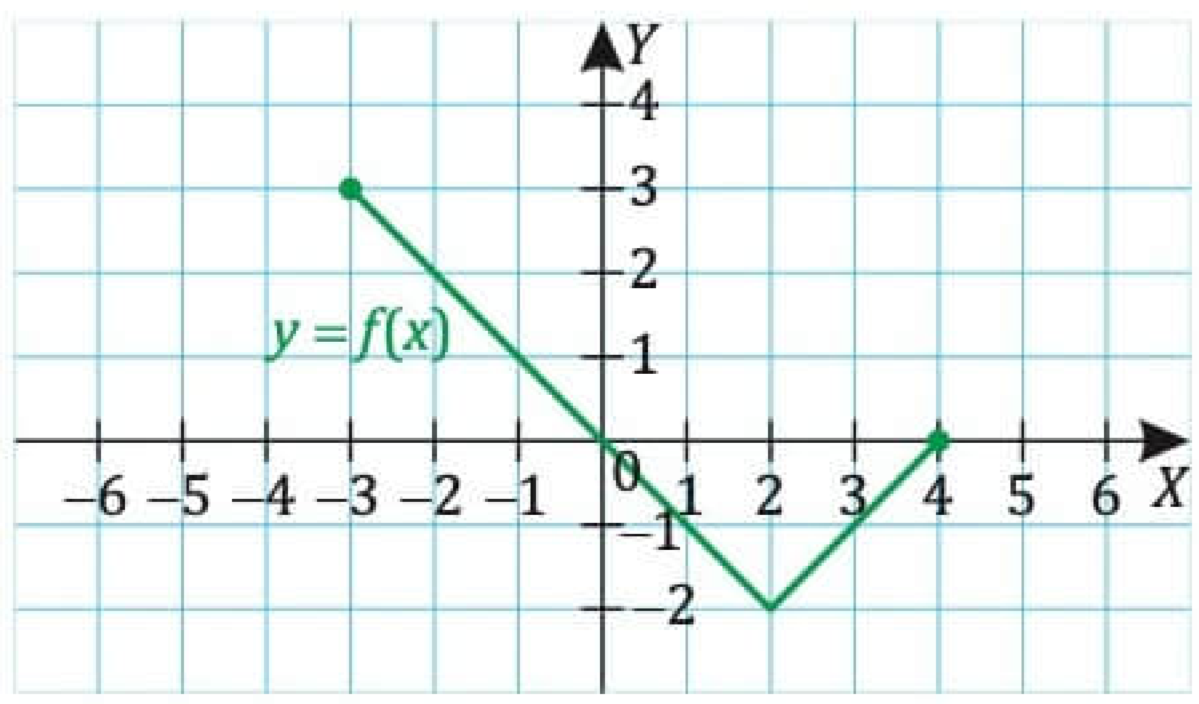
powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi OY i skali 4, czyli będzie „czterokrotnie rozciągnięty" (wzdłuż osi OX).
Natomiast wykres funkcji

$$y = f(3x)$$

powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi OY i skali $\frac{1}{3}$, czyli będzie „trzykrotnie ściśnięty" (wzdłuż osi OX).

Przykład 4.

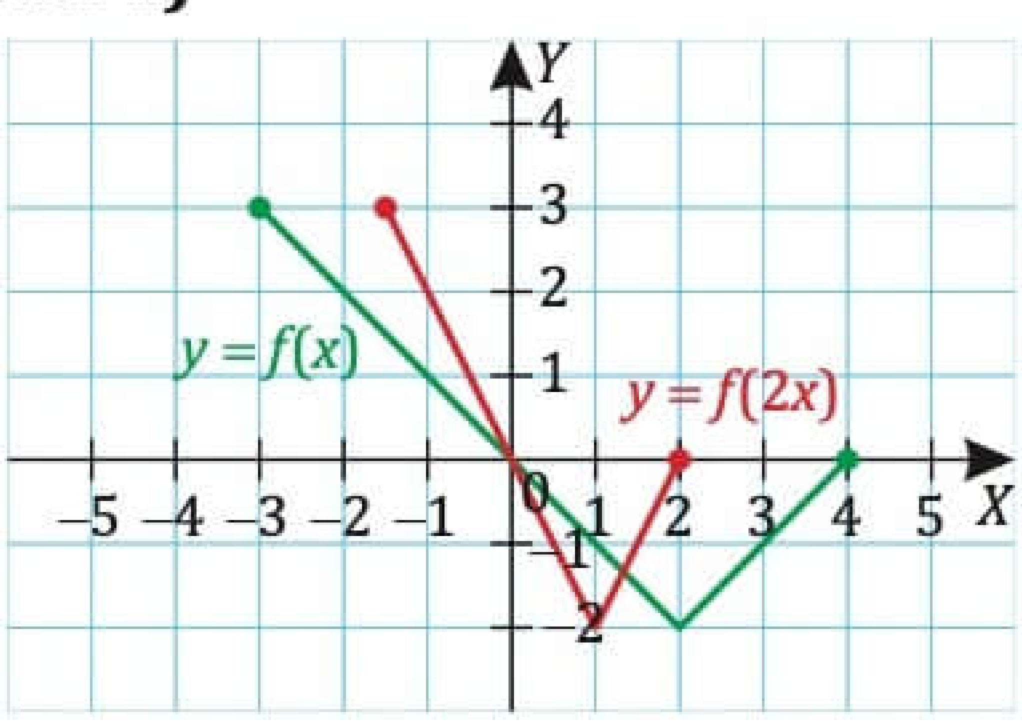
Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



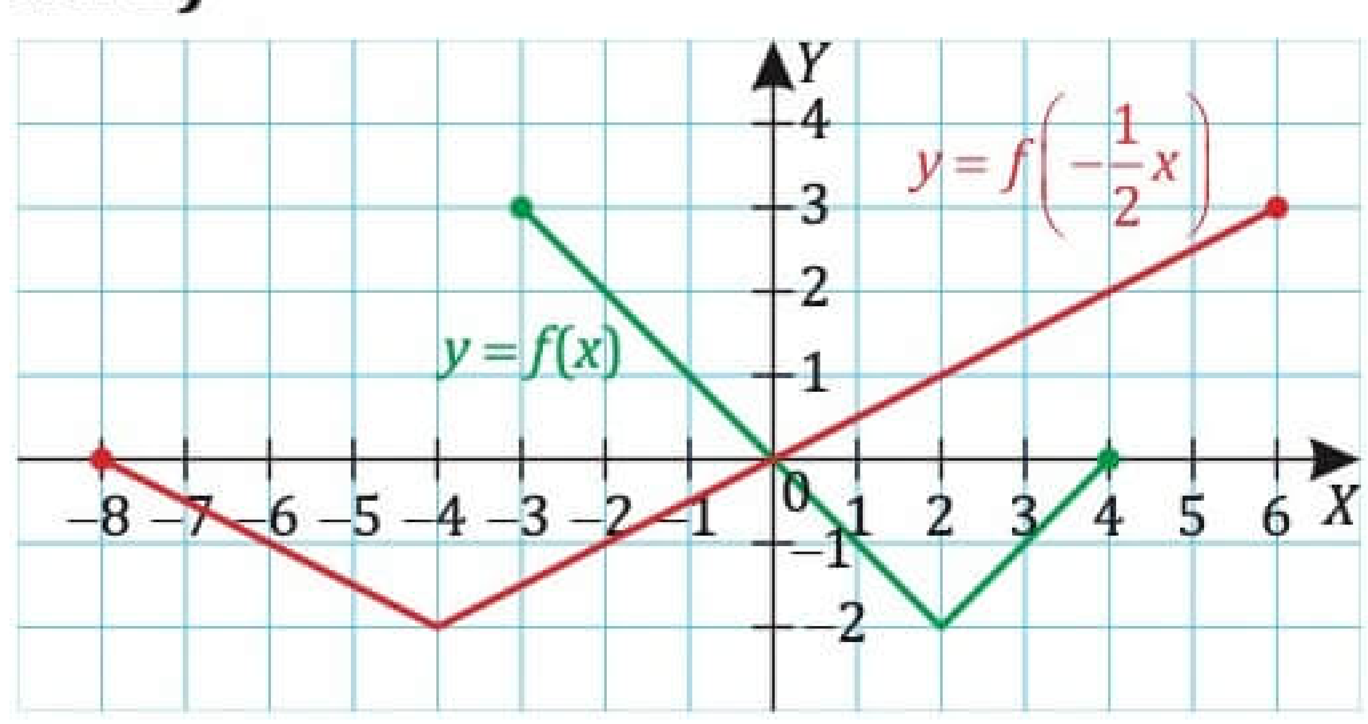
Naszkicujemy wykresy funkcji:

a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

Ad a)



Ad b)



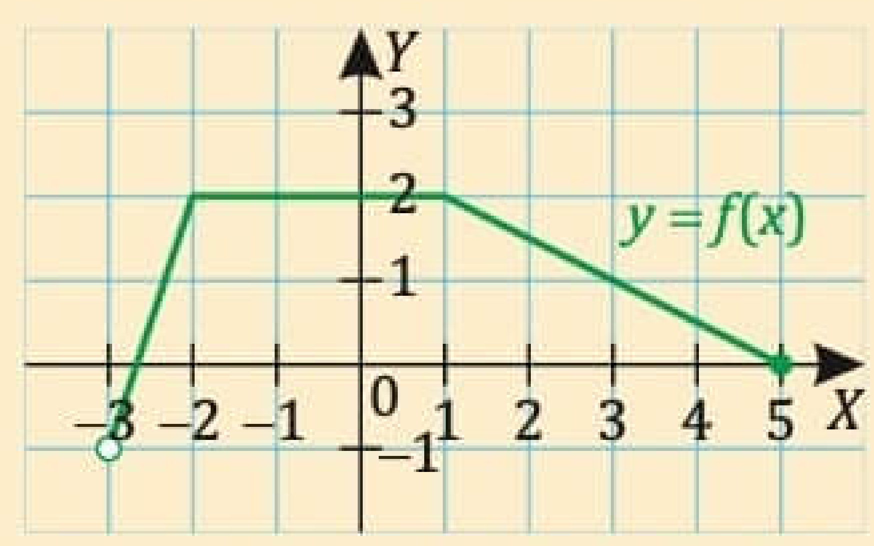
Przykład 5.

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x+3}$, gdzie $x \in \langle -3, 6\rangle$. Naszkicujemy wykres tej funkcji, a następnie – w tym samym układzie współrzędnych – naszkicujemy wykres funkcji:

a) $g(x) = f(3x)$ b) $h(x) = f\left(-\frac{3}{4}x\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest wykres funkcji f (zobacz rysunek obok). Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji:



   a) $y = 0{,}5f(x)$ b) $y = f(0{,}5x)$
   c) $y = -2f(x)$ d) $y = f(-2x)$.

2. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g, jeśli:
   a) $f(x) = x^2$, gdzie $x \in (-2, 3)$ $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, gdzie $x \in (-2, 3)$
   b) $f(x) = x^3$, gdzie $x \in (-1, 2\rangle$ $g(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3$, gdzie $x \in (-3, 6\rangle$.