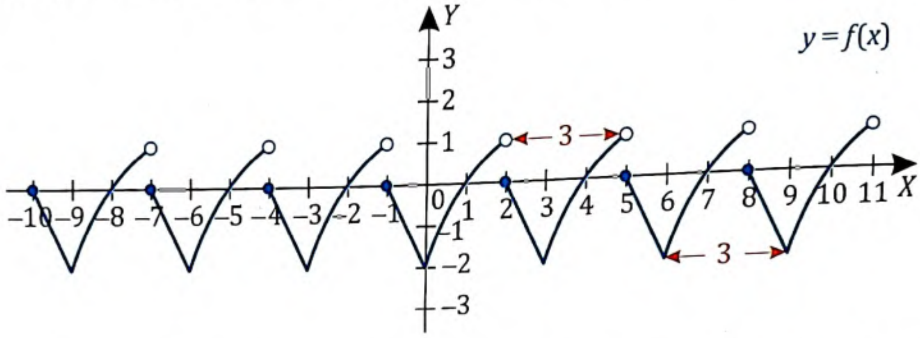
Funkcje okresowe

Na poniższym rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $y=f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.



Wykres funkcji f charakteryzuje się tym, że pewien jego fragment powtarza się cyklicznie.

> ***Definicja 1.***
> Funkcję liczbową f nazywamy **funkcją okresową** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji f, liczba $x + T$ też należy do dziedziny tej funkcji i zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy **okresem** funkcji f.

Możemy zapisać krócej:

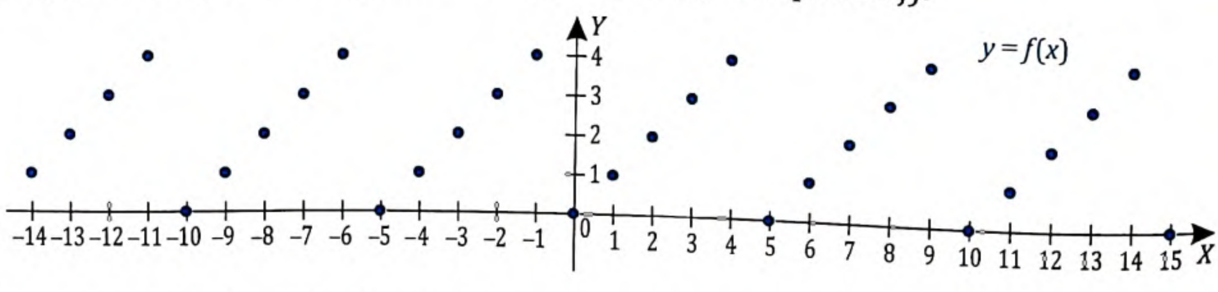
Funkcja liczbowa f jest funkcją okresową $\Leftrightarrow \bigvee_{T\neq 0} \bigwedge_{x\in D_f} [(x+T) \in D_f \wedge f(x+T)=f(x)]$

Wróćmy do wykresu funkcji f przedstawionego na początku tego tematu. Okresem funkcji f jest liczba 3, ale również –9, –6, –3, 6, 9 itd. są okresami tej funkcji.

Jeśli liczba T jest okresem funkcji, to liczba $k \cdot T$, $k \in \mathbf{N} - \{0\}$ jest także okresem tej funkcji.
Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni funkcji f, to nazywamy go **okresem podstawowym** lub okresem zasadniczym i oznaczamy T_0. Dla funkcji z początku tematu okres zasadniczy wynosi 3, czyli $T_0 = 3$.

Przykład 1.

Funkcja f, która każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5, jest funkcją okresową (zobacz wykres poniżej).



Okresem tej funkcji f jest każda liczba mająca postać $k \cdot 5$, gdzie $k \in \mathbf{C} - \{0\}$. Okres podstawowy tej funkcji jest równy 5, $T_0 = 5$.

Przykład 2.

Funkcja $f(x) = x - [x]$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest okresowa (zobacz przykład 6. str. 292). Jej okresem jest każda liczba całkowita różna od zera, $T_0 = 1$.

Przykład 3.

Każda funkcja stała $f(x) = a$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ oraz a to ustalona liczba rzeczywista, jest funkcją okresową. Każda liczba rzeczywista różna od zera jest okresem tej funkcji. Funkcja stała nie ma okresu podstawowego.

Przykład 4.

Wykażemy, że funkcja Dirichleta $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{W} \\ 0, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{NW} \end{cases}$ jest funkcją okresową, której okresem jest dowolna liczba wymierna różna od zera.

Założenie: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{W} \\ 0, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{NW} \end{cases}, \quad T \in \boldsymbol{W} - \{0\}$

Teza: liczba T jest okresem funkcji f

Dowód: Liczba T jest liczbą wymierną różną od zera, więc dla każdej liczby x, $x \in \boldsymbol{R}$, liczba $x + T$ należy do dziedziny funkcji f (suma liczby wymiernej różnej od zera i liczby rzeczywistej jest liczbą rzeczywistą).
Jeśli $x \in \boldsymbol{W}$, to $(x + T) \in \boldsymbol{W}$ (suma dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną), więc

$$f(x + T) = 1$$

Jeśli $x \in \boldsymbol{NW}$, to $(x + T) \in \boldsymbol{NW}$ (suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną), więc

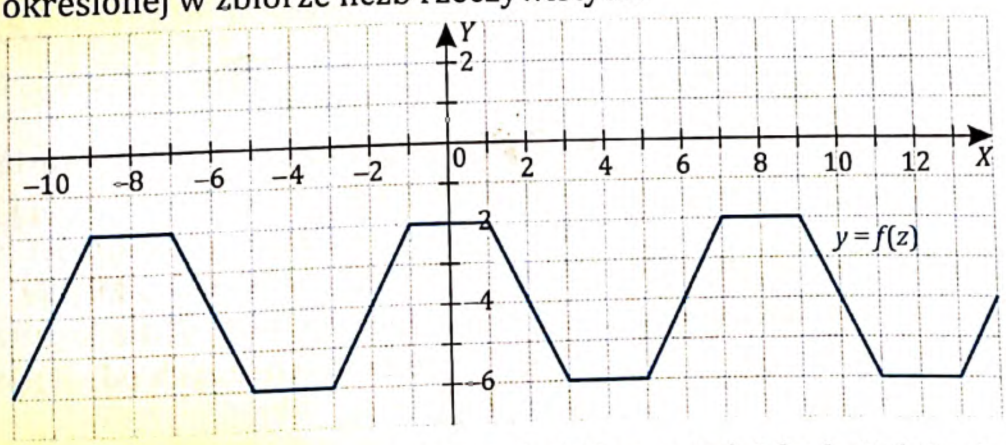
$f(x + T) = 0$, zatem – dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f(x+T) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{W} \\ 0, \text{ jeśli } x \in \boldsymbol{NW} \end{cases}, \quad \text{czyli } f(x+T) = f(x),$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji okresowej f określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.



Odczytaj z wykresu okres zasadniczy i zbiór wartości funkcji f. Zapisz symbolicznie przedziały monotoniczności funkcji.