Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

Omówione w poprzednim temacie twierdzenie 3. jest bardzo przydatne do badania układów równań pierwszego stopnia z parametrem.

Przykład 1.

Przeprowadzimy dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = m+1 \end{cases} \qquad (*)$$

ze względu na parametr m ($m \in \boldsymbol{R}$).

Obliczamy wyznaczniki W, W_x, W_y:

$$W = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \qquad W_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m - (m+1) = m-1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = m^2 + m - 1 - 1 = \left(m^2 - 1\right) + (m-1) =$$

$$= (m-1)(m+1) + (m-1) = (m-1)(m+2)$$

Sprawdzamy, kiedy układ równań (*) ma tylko jedno rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem 3. ze str. 51 ma być spełniony warunek $W \neq 0$. Mamy zatem:

$$W \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (m \neq 1 \wedge m \neq -1)$$

Tak więc, jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to rozwiązanie układu równań (*) ma postać:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m-1}{(m-1)(m+1)} \\ y = \dfrac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{m+2}{m+1} \end{cases}$$

Pozostają do zbadania dwa przypadki: 1° $m = 1$ oraz 2° $m = -1$.

1° Jeśli $m = -1$, to otrzymujemy: $W = 0$, $W_x = -2$, $W_y = -2$.

Zatem układ równań (*) jest sprzeczny. Przyjmuje postać: $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2° Jeśli $m = 1$, to układ równań (*) jest nieoznaczony. Przyjmuje postać: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Podsumujmy:

Jeśli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to układ równań (*) spełnia tylko jedna para liczb $\left(\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{m+2}{m+1}\right)$;

jeśli $m = -1$, to układ równań (*) nie ma rozwiązań;

jeśli $m = 1$, to układ równań (*) spełnia nieskończenie wiele par liczb mających postać $(x, 2 - x)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wartości parametru k, dla których rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 3x - 4y = |k| - 2k + 1 \\ -6x + 6y = 3k - 2|k| \end{cases} \qquad (*)$$

jest para liczb o takich samych znakach.

Obliczamy wyznaczniki W, W_x, W_y:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

$$W_x = \begin{vmatrix} |k| - 2k + 1 & -4 \\ 3k - 2|k| & 6 \end{vmatrix} = 6|k| - 12k + 6 - 8|k| + 12k = 6 - 2|k|$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & |k| - 2k + 1 \\ -6 & 3k - 2|k| \end{vmatrix} = 9k - 6|k| + 6|k| - 12k + 6 = 6 - 3k$$

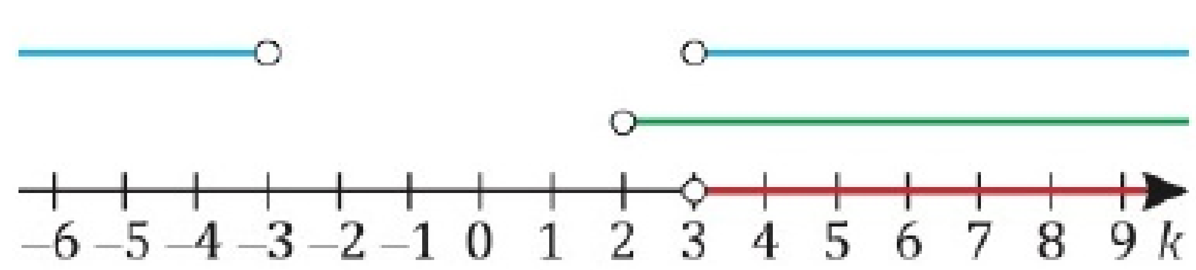
Ponieważ wyznacznik W jest różny od zera, więc układ równań (*) ma tylko jedno rozwiązanie $\left(\frac{1}{3}|k| - 1, \frac{1}{2}k - 1\right)$ dla dowolnej wartości parametru k. Liczby $\frac{1}{3}|k| - 1$ oraz $\frac{1}{2}k - 1$ mają mieć takie same znaki, to znaczy obie mają być dodatnie albo obie ujemne. Prowadzi to nas do alternatywy warunków:

$$\left(\frac{1}{3}|k| - 1 > 0 \wedge \frac{1}{2}k - 1 > 0\right) \vee \left(\frac{1}{3}|k| - 1 < 0 \wedge \frac{1}{2}k - 1 < 0\right)$$

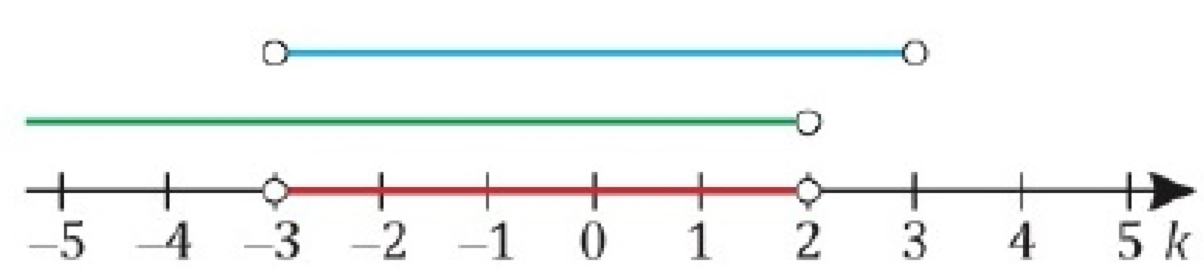
Mamy zatem

$$[(|k| > 3 \ \wedge \ k > 2) \qquad \vee \qquad (|k| < 3 \ \wedge \ k < 2)] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{[k \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \ \wedge \ k \in (2, +\infty)] \ \vee [k \in (-3, 3) \ \wedge \ k \in (-\infty, 2)]\}$$



(3, +∞)



(–3, 2)

Rozwiązaniem układu równań (*) jest para liczb o takich samych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (-3, 2) \cup (3, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań z parametrem m, gdzie $m \in \mathbf{R}$.

   a) $\begin{cases} 3x - y = m \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - my = 2 \\ x + my = 2m \end{cases}$