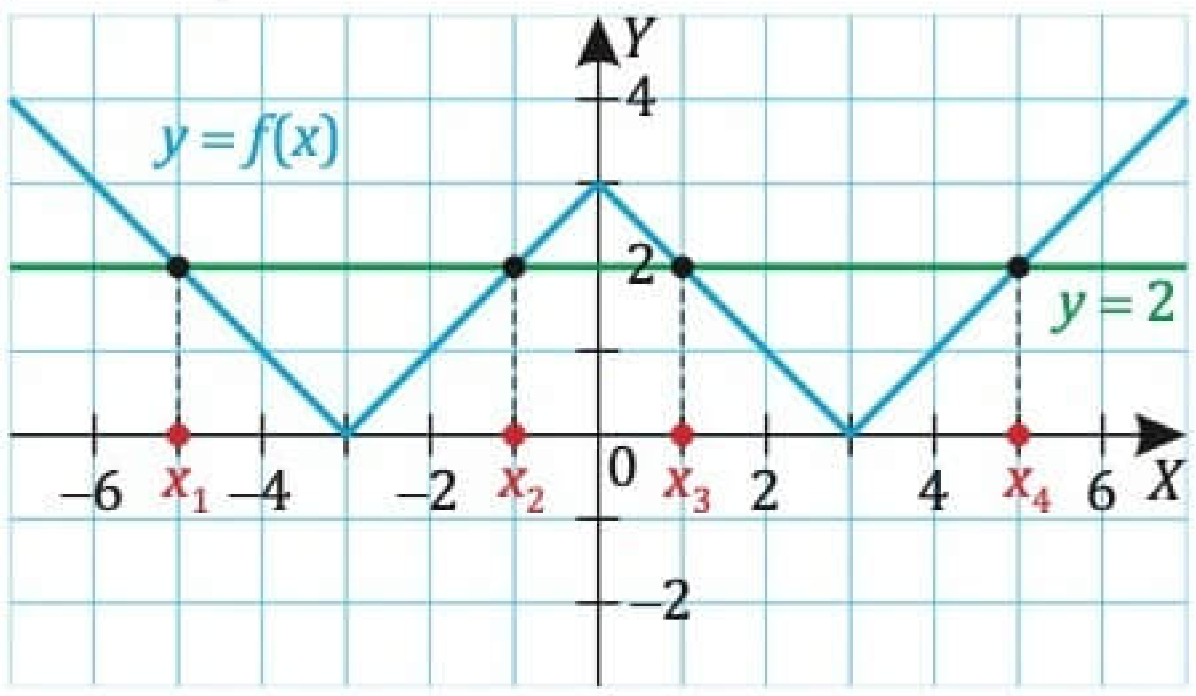
Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania zadań

Umiejętność szkicowania wykresów funkcji może być przydatna do wyznaczenia rozwiązań równania oraz rozwiązań nierówności. Korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji, możemy również badać liczbę rozwiązań równania z parametrem. Powyższe zagadnienia omówimy w kolejnych przykładach.

Przykład 1.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \big||x| - 3\big|$ znajdziemy rozwiązania równania $\big||x| - 3\big| = 2$.



Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Rozwiązaniami danego równania są wszystkie argumenty, dla których funkcja

$f(x) = \big||x| - 3\big|$ przyjmuje wartość 2.

Szkicujemy w jednym układzie współrzędnych wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = 2$. Wykresy obu funkcji przecinają się w czterech punktach.

Odczytujemy odcięte tych punktów:

$x_1 = -5$ $\quad x_2 = -1$ $\quad x_3 = 1$ $\quad x_4 = 5$

Sprawdzamy dokładność odczytu liczb x_1, x_2, x_3, x_4 poprzez obliczenie wartości funkcji f dla tych argumentów:

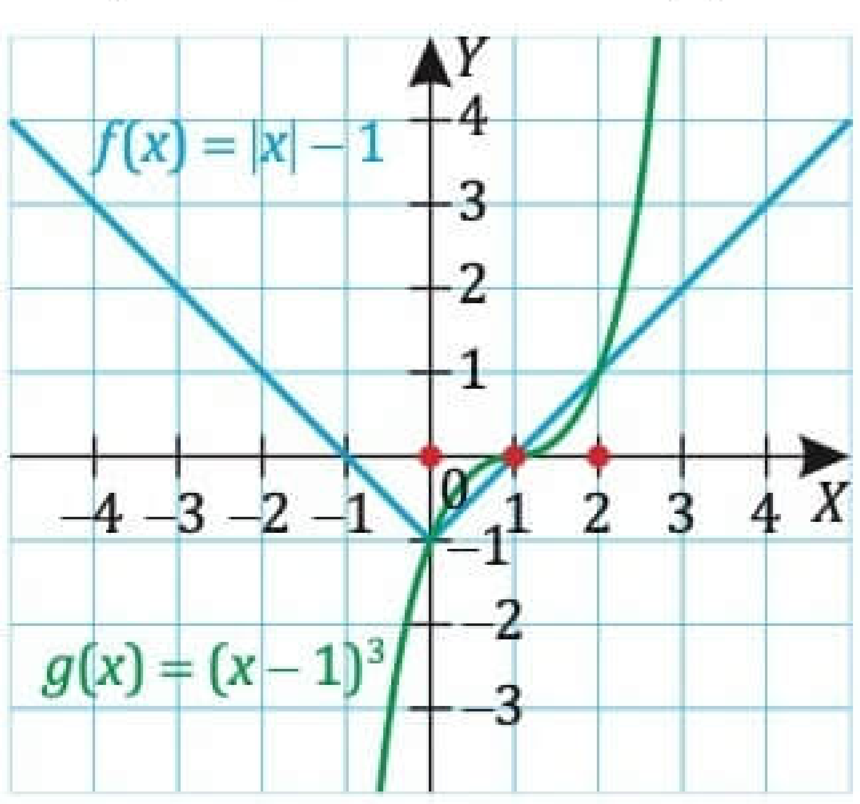
$f(-5) = \big||-5| - 3\big| = |5 - 3| = 2$ $\qquad f(-1) = \big||-1| - 3\big| = |1 - 3| = 2$

Analogicznie $f(5) = 2$ oraz $f(1) = 2$.

Rozwiązaniami równania są cztery liczby: –5, –1, 1, 5.

Przykład 2.

Na podstawie wykresów funkcji $f(x) = |x| - 1$ oraz $g(x) = (x - 1)^3$ wyznaczymy rozwiązania równania $|x| - 1 = (x - 1)^3$.



Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R}$.

Szkicujemy wykresy funkcji f i g. Następnie znajdujemy punkty wspólne obu wykresów: $A(2, 1)$, $B(1, 0)$, $C(0, -1)$ i sprawdzamy, czy liczby 0, 1, 2 (pierwsze współrzędne tych punktów) spełniają równanie $|x| - 1 = (x - 1)^3$.

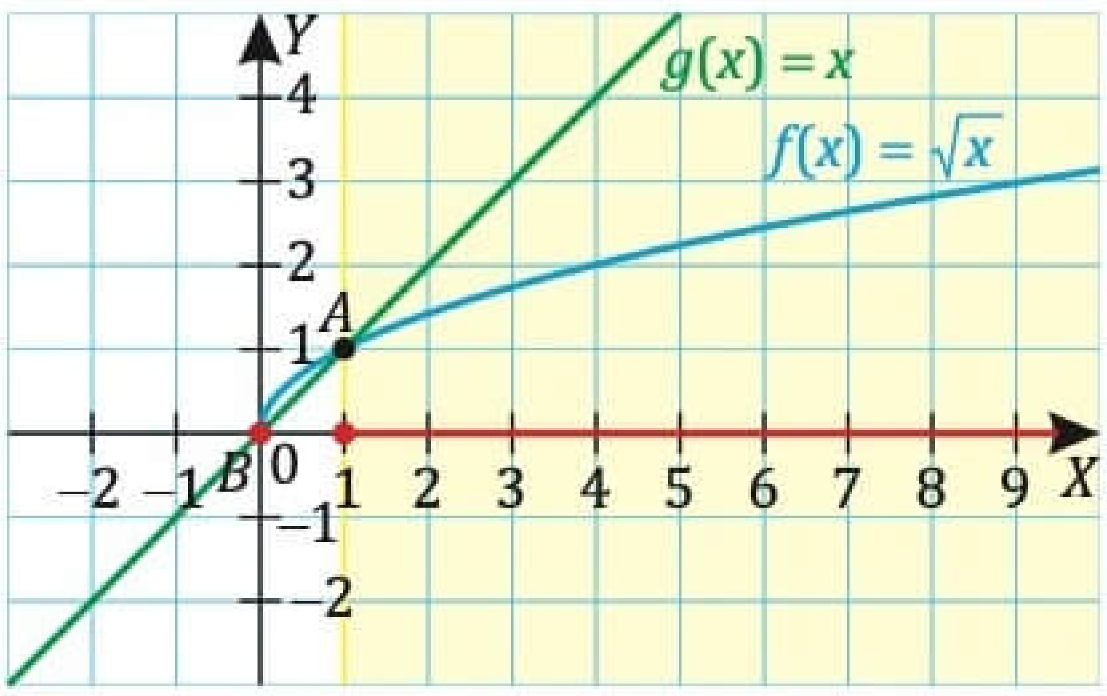
- $x = 0$ $\quad L = |0| - 1 = -1$, $P = (0 - 1)^3 = -1$; $L = P$
- $x = 1$ $\quad L = |1| - 1 = 0$, $P = (1 - 1)^3 = 0$; $L = P$
- $x = 2$ $\quad L = |2| - 1 = 1$, $P = (2 - 1)^3 = 1$; $L = P$.

Rozwiązaniami równania są trzy liczby: 0, 1, 2.

Przykład 3.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykresu funkcji $g(x) = x$ podamy zbiór rozwiązań nierówności $\sqrt{x} \leqslant x$.

Dziedziną nierówności jest przedział $\langle 0, +\infty)$. Zatem zbiór rozwiązań zawiera się w tym przedziale.



Szkicujemy w układzie współrzędnych wykresy funkcji

$f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x$.

Wykresy te przecinają się w dwóch punktach o współrzędnych

$(0, 0)$ oraz $(1, 1)$.

Zatem dla argumentów 0 i 1 wartości obu funkcji są równe. Otrzymaliśmy

$\sqrt{x} = x$, jeśli $x = 0$ lub $x = 1$.

Aby znaleźć zbiór rozwiązań nierówności $\sqrt{x} < x$, wystarczy wyznaczyć zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja g.

Zauważamy, że wykres funkcji f znajduje się poniżej wykresu funkcji g w przedziale $(1, +\infty)$. Mamy:

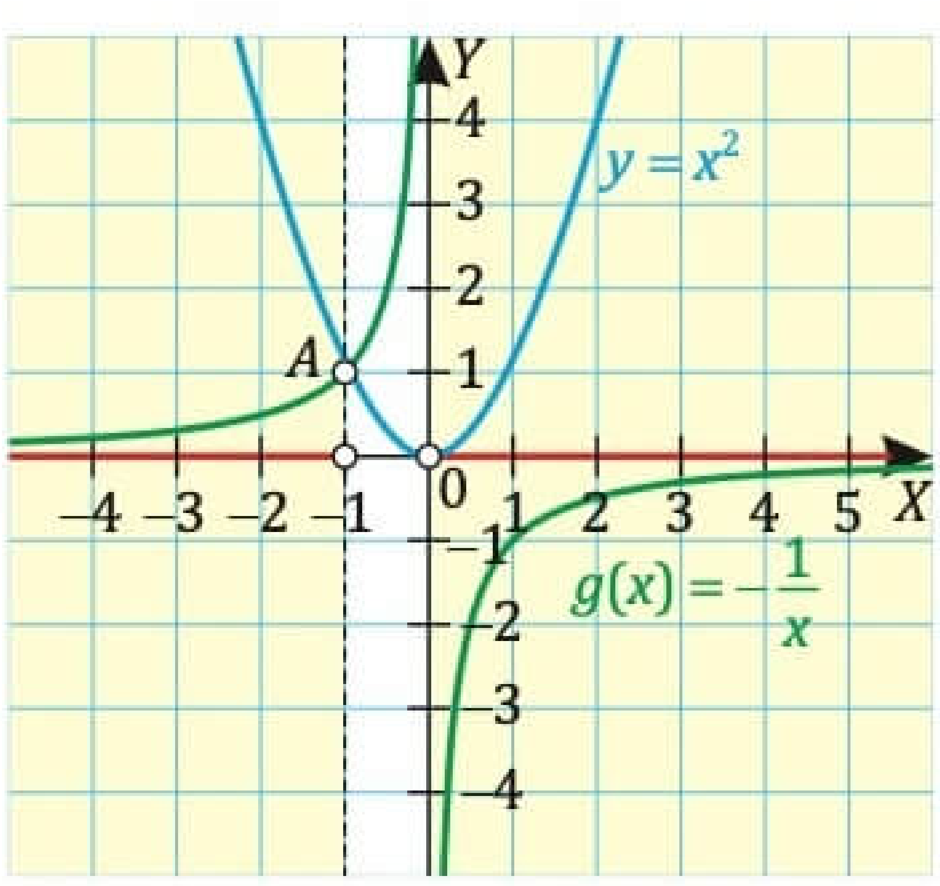
$$\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

Ostatecznie, nierówność $\sqrt{x} \leqslant x$ jest spełniona przez wszystkie liczby należące do zbioru $\langle 1, +\infty) \cup \{0\}$.

Przykład 4.

Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 + \frac{1}{x} > 0$.

Nierówność możemy zapisać w postaci $x^2 > -\frac{1}{x}$. Dziedziną nierówności jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Niech $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$. Szukamy tych argumentów obu funkcji, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

Szkicujemy wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych. Następnie wyznaczamy części wykresu funkcji g znajdujące się poniżej wykresu funkcji f i odczytujemy odcięte tych punktów

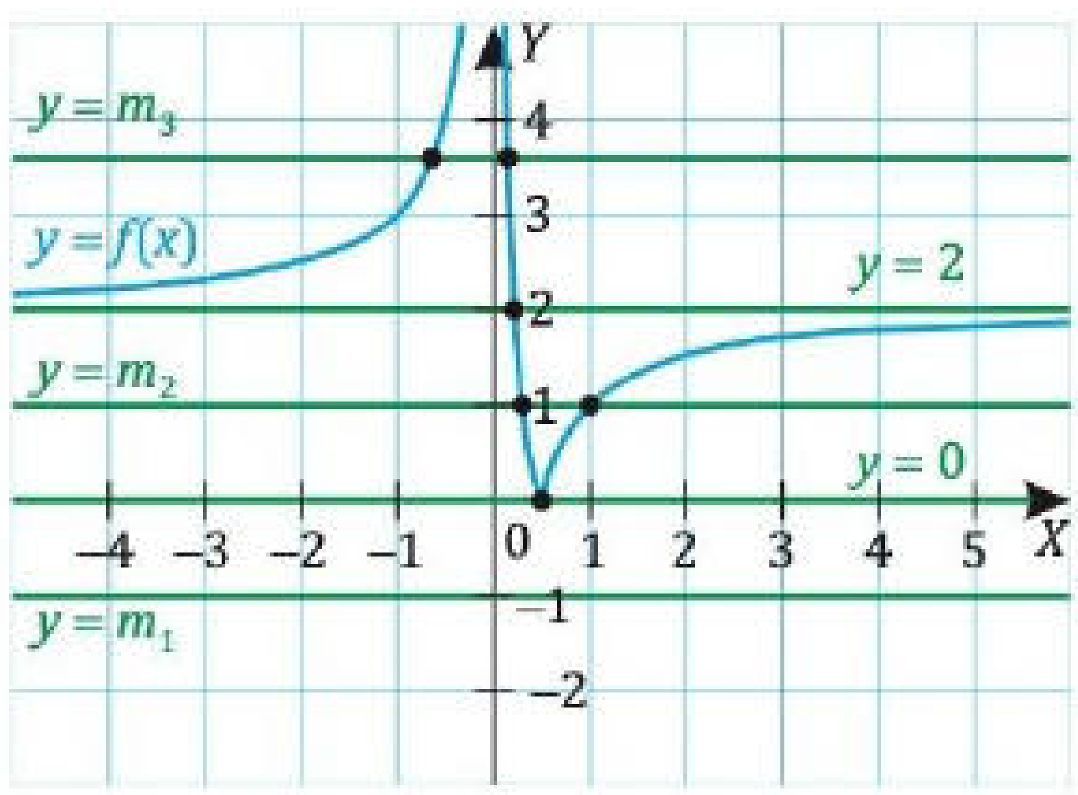
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 > -\frac{1}{x}$ jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Przykład 5.

Wyznaczymy liczbę rozwiązań równania $\left|\frac{1}{x}-2\right| = m$ w zależności od wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

Niewiadomą w danym równaniu jest liczba x, $x \neq 0$. Parametr m jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Zauważ, że jeśli m jest liczbą ujemną, np. -1, to otrzymamy równanie sprzeczne. Jeśli $m = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie, równe $\frac{1}{2}$. Ale trudno jest stwierdzić od razu liczbę rozwiązań tego równania w przypadku, gdy liczba m jest dodatnia. Dlatego naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{1}{x}-2\right|$.



Równanie $\left|\frac{1}{x}-2\right| = m$ ma tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych ma wykres funkcji f z prostą $y = m$. Rysunek obok ilustruje różne położenie tej prostej, w zależności od wartości liczby m.

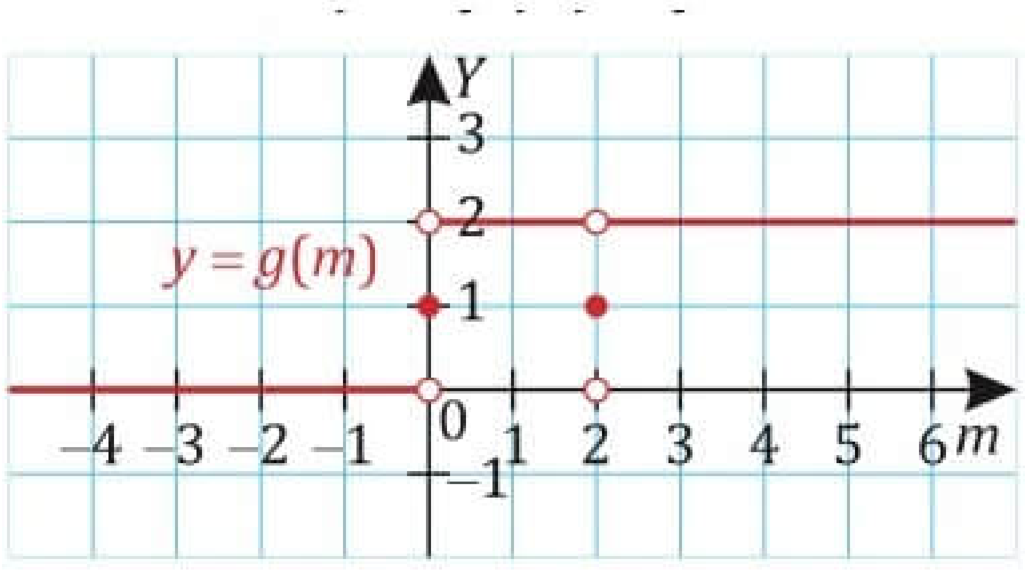
Prosta $y = 0$, a także prosta $y = 2$, ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f. To znaczy, że jeśli $m = 0$ lub $m = 2$, to równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

Prosta $y = m_1$ nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji f. Łatwo stwierdzić, że tak dzieje się wtedy, gdy $m_1 < 0$.

Zatem wtedy, gdy $m < 0$, równanie nie ma rozwiązań. Natomiast prosta $y = m_2$ ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f; podobnie prosta $y = m_3$. Ponieważ $m_2 \in (0, 2)$, zaś $m_3 \in (2, +\infty)$, więc równanie ma dwa rozwiązania, jeśli $m \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Rozstrzygnęliśmy już liczbę rozwiązań równania dla wszystkich liczb rzeczywistych m. Możemy więc podsumować.

Równanie ma dwa rozwiązania, jeśli $m \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$; ma jedno rozwiązanie, jeśli $m \in \{0, 2\}$; nie ma rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, 0)$.

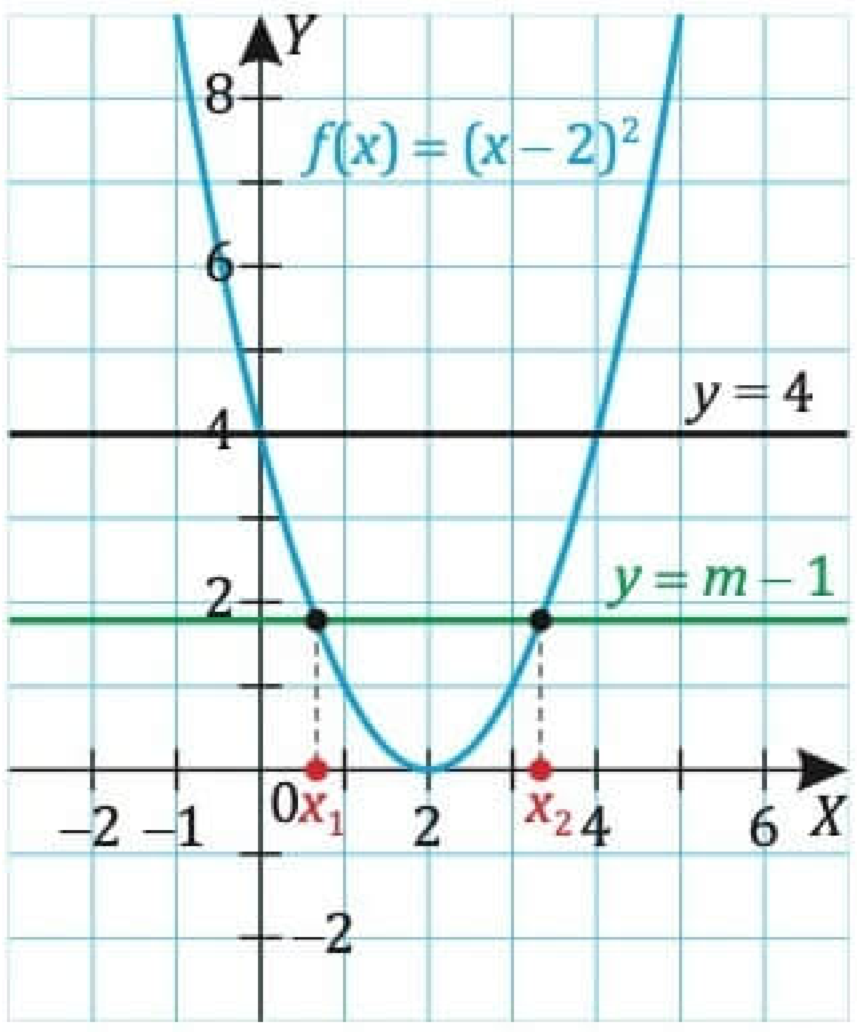
W ostatnim przykładzie ustaliliśmy zależność między liczbą m, $m \in \boldsymbol{R}$, a liczbą rozwiązań danego równania. Każdej liczbie rzeczywistej m została przyporządkowana tylko jedna liczba rozwiązań tego równania. Zatem przyporządkowanie to jest funkcją, określoną w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Oznaczmy ją jako g. Podamy wzór funkcji g i naszkicujemy jej wykres.



$$g(m) = \begin{cases} 2, \text{ jeśli } m \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ 1, \text{ jeśli } m \in \{0, 2\} \\ 0, \text{ jeśli } m \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Przykład 6.

Wyznaczymy wartości parametru m, dla których równanie $(x-2)^2 = m-1$ ma dwa rozwiązania dodatnie.



Szkicujemy wykres funkcji

$f(x) = (x-2)^2$

Znajdujemy prostą równoległą do osi OX, która przecina się z wykresem funkcji f w dwóch punktach, mających pierwsze współrzędne dodatnie. Prosta ta ma wzór $y = m - 1$. Zauważamy, że musi ona przeciąć oś OY między punktami $(0, 0)$ oraz $(0, 4)$. W takim razie spełniony jest warunek:

$0 < m - 1 < 4$, skąd

$1 < m < 5$

Równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, jeśli $m \in (1, 5)$.

Podobnie wyznacz te wartości parametru m, dla których dane równanie $(x-2)^2 = m-1$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków (jedno rozwiązanie dodatnie, a drugie rozwiązanie ujemne).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Na podstawie tego wykresu rozwiąż równanie $f(x) = 2$.
2. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań równania $\left||x| - 1\right| = 1 - x^2$.
3. Na podstawie wykresów funkcji $f(x) = x^3$ oraz $g(x) = \dfrac{1}{x}$ rozwiąż nierówność $x^3 - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$.
4. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $|x| > \sqrt{x+2}$.
5. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania $|x^2 - 4| = m + 1$ w zależności od wartości parametru m.
6. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = |x + 5|$ wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|x + 5| = 2 - m$:
   a) ma rozwiązania
   b) ma dwa rozwiązania ujemne.