1. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

Przykład 1.

Załóżmy, że cena jednego kilograma cukru wynosi 4 zł 60 gr. Zaobserwujemy, jak zmienia się koszt zakupów w zależności od ilości zakupionego cukru. Pokazuje to poniższa tabela:

liczba kg cukru	x	1	2	3	4	5	6
koszt zakupu w zł	y	4,60	9,20	13,80	18,40	23	27,60

Zależność między kosztem zakupu a liczbą kilogramów cukru wyraża wzór:

$y = 4{,}6 \cdot x,$

gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Zauważ, że koszt zakupu (y) i liczba kilogramów zakupionego cukru (x) zmieniają się w tym samym stosunku, np. trzykrotny wzrost liczby kilogramów pociąga za sobą trzykrotny wzrost kosztu zakupu. Stały stosunek kosztu zakupu (y) do liczby kilogramów zakupionego cukru (x) wyraża cenę 1 kg cukru, czyli 4,6 (zł).

Przykład 2.

Rowerzysta postanowił, że pewien odcinek trasy przejedzie ze stałą prędkością 12 km/h. Jak będzie zmieniała się długość przebytej drogi, jeśli rowerzysta na ten eksperyment przeznaczył 4 godziny?

Długość przebytej drogi przy stałej prędkości jazdy zależy od czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, i wyraża się wzorem:

$s = v \cdot t,$ czyli $s = 12 \cdot t,$

gdzie s – długość drogi w km, t – czas jazdy w godzinach, $t \in (0, 4\rangle$.
Zauważ, że tym razem długość przebytej drogi (s) i liczba godzin jazdy (t) zmieniają się w tym samym stosunku. Stały stosunek długości przebytej drogi (s) do liczby godzin jazdy (t) wyraża wartość prędkości jazdy, czyli 12 (km/h).

Jeśli dwie wielkości zmieniają się w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne.

> ***Definicja 1.***
> **Proporcjonalnością prostą** nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi y, x, określoną wzorem $y = a \cdot x$, gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną **współczynnikiem proporcjonalności**.

W przykładzie 1. koszt zakupu jest wprost proporcjonalny do liczby kilogramów zakupionego cukru, a współczynnik proporcjonalności 4,60 (zł) oznacza stałą cenę 1 kg cukru.
W przykładzie 2. długość drogi jest wprost proporcjonalna do czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, a współczynnikiem proporcjonalności jest stała prędkość rowerzysty 12 (km/h).

Przykład 3.

a) Rozważmy trójkąty równoboczne. Długość boku trójkąta oznaczmy przez x, zaś jego obwód przez y. Czy obwód trójkąta i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności?

b) Niech x oznacza długość boku kwadratu, natomiast y – pole kwadratu o boku x. Czy pole kwadratu i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Ad a) Zależność między obwodem trójkąta równobocznego a długością jego boku wyraża wzór:

$y = 3x$, gdzie $x > 0$

Zauważmy, że stosunek obwodu trójkąta do długości jego boku jest stały i wynosi 3. Liczba 3 – oznaczająca liczbę boków trójkąta – jest wielkością stałą. Jest to współczynnik proporcjonalności.

Ad b) Pole kwadratu w zależności od długości boku kwadratu wyraża się wzorem

$y = x^2$, gdzie $x > 0$

Zauważmy, że pole kwadratu nie jest wprost proporcjonalne do długości boku kwadratu. Na przykład kwadrat o boku 3 ma pole równe 9, zatem $\frac{9}{3} = 3$; zaś kwadrat o boku 8 ma pole równe 64, zatem $\frac{64}{8} = 8$. Stosunek pola kwadratu do długości jego boku nie jest stały.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Miary x, y pewnych zmiennych wielkości X, Y są podane w tabelce. Czy wartości x i y są wprost proporcjonalne? Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności i napisz wzór opisujący zależność zmiennej y od zmiennej x.

x	1,5	2	2,5	3
y	4,5	6	7,5	9

2. Rozważmy trójkąty o stałej wysokości h równej 4. Napisz wzór funkcji, która opisuje, jak zmienia się pole trójkąta w zależności od długości podstawy a, na którą opuszczona jest wysokość h. Naszkicuj wykres tej funkcji, jeśli $a \in \langle 1, 3 \rangle$.