Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej

Definicja 1.
Funkcją liniową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi; a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b – wyrazem wolnym. Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Przez dwa różne punkty płaszczyzny przechodzi tylko jedna prosta. Żeby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy więc wyznaczyć dwa punkty należące do jej wykresu, następnie poprowadzić przez nie prostą.

Zauważ, że dla argumentu 0 wartość funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest równa b:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

Zatem prosta będąca wykresem funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.
Obliczmy również wartość funkcji f dla argumentu 1:

$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$

Otrzymaliśmy, że punkt $(1, a + b)$ też należy do wykresu funkcji f.

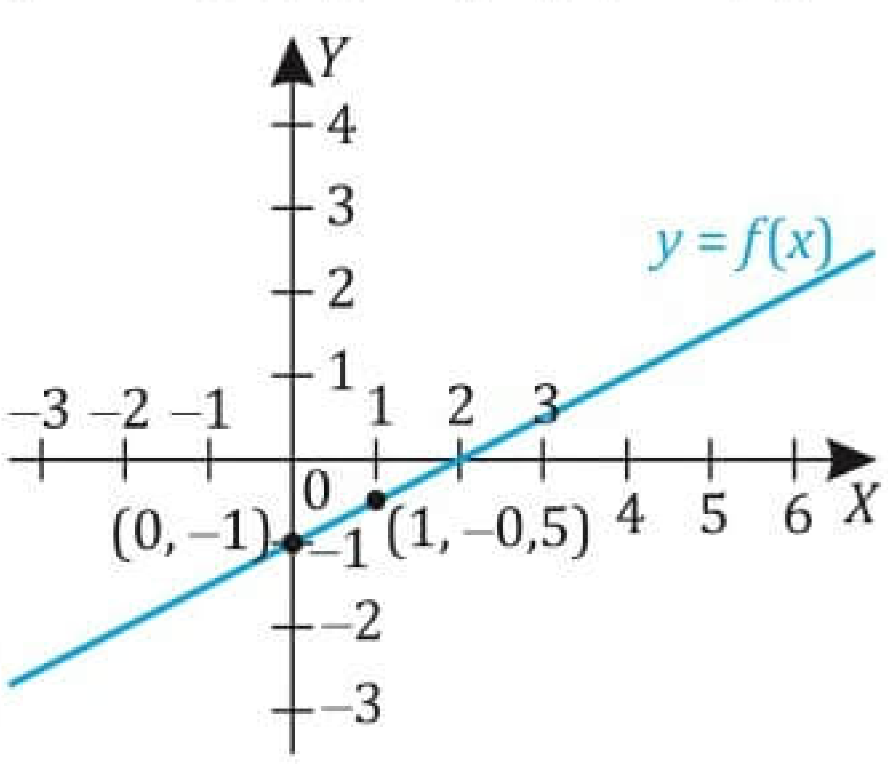
Prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ i $(1, a + b)$.

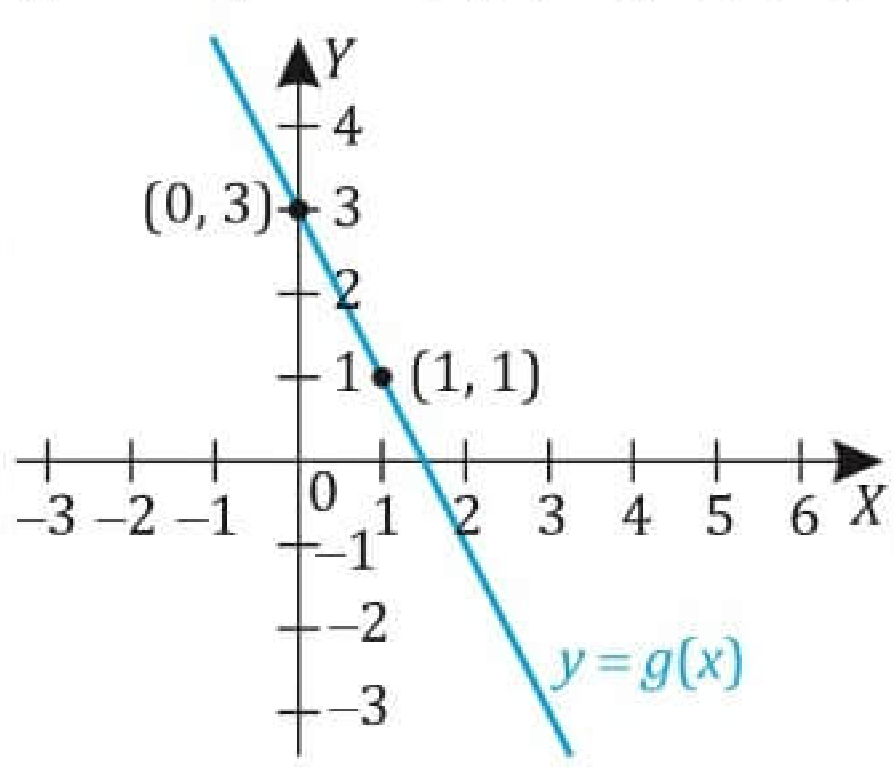
Przykład 1.

Naszkicujemy wykresy funkcji liniowych:
1) $f(x) = 0{,}5x - 1$ 2) $g(x) = -2x + 3$ 3) $h(x) = 2 \quad (a = 0)$

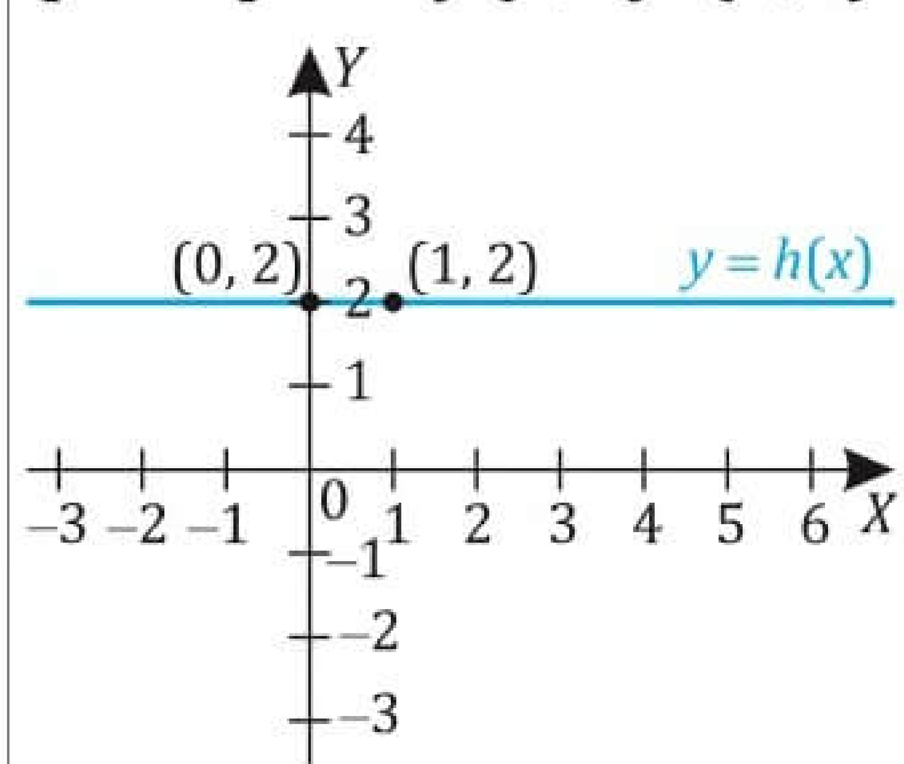
1) Wykresem funkcji liniowej $f(x) = 0{,}5x - 1$ jest prosta wyznaczona przez punkty $(0, -1)$ i $(1, -0{,}5)$.



2) Wykresem funkcji liniowej $g(x) = -2x + 3$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 3)$ i $(1, 1)$.



3) Wykresem funkcji liniowej $h(x) = 0x + 2$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 2)$ i $(1, 2)$.

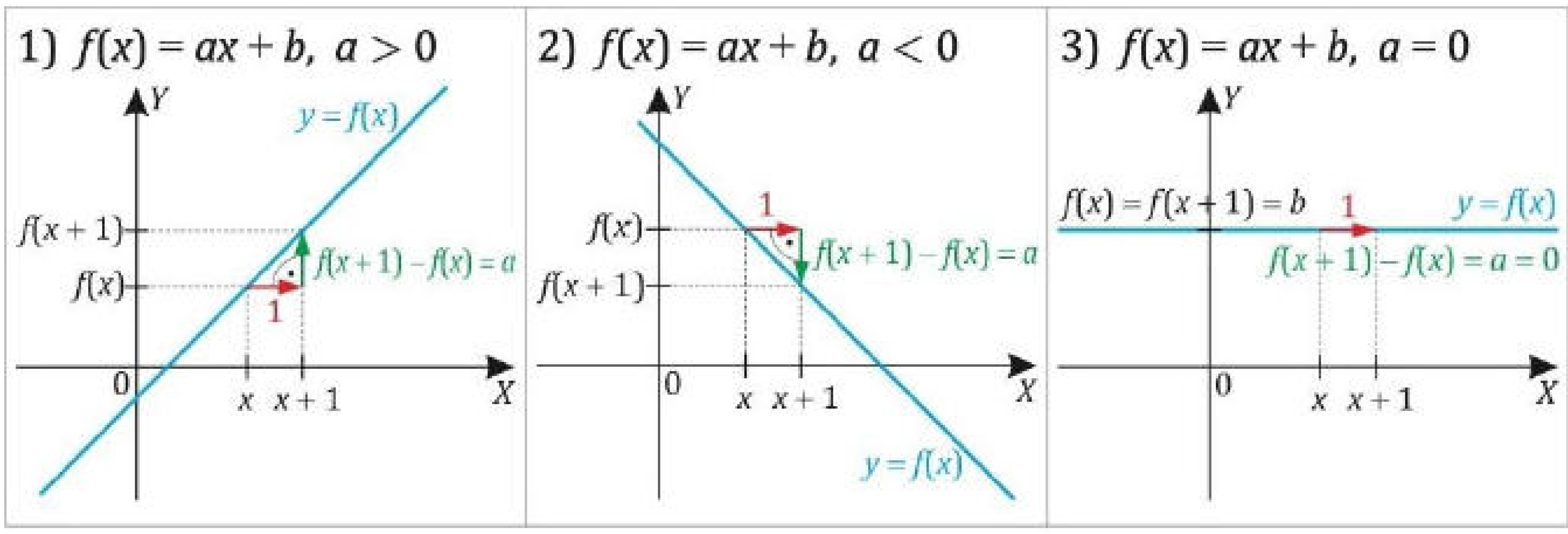


Obliczmy teraz różnicę wartości poszczególnych funkcji liniowych z przykładu 1. dla argumentów 1 i 0:

$f(1) - f(0) = -0{,}5 - (-1) = 0{,}5$
$g(1) - g(0) = 1 - 3 = -2$
$h(1) - h(0) = 2 - 2 = 0$

Każda różnica jest równa współczynnikowi kierunkowemu danej funkcji liniowej! Okazuje się, że dla dowolnego argumentu x funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji równy a:

$$f(x+1) - f(x) = a \cdot (x+1) + b - (ax+b) = ax + a + b - ax - b = a$$



Ad 1) W przypadku, gdy $a > 0$, „przyrost" wartości funkcji jest dodatni. Znaczy to, że wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji – zatem funkcja jest rosnąca.

Ad 2) W przypadku, gdy $a < 0$, „przyrost" wartości funkcji jest ujemny. Znaczy to, że wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji – zatem funkcja jest malejąca.

Ad 3) W przypadku, gdy $a = 0$, „przyrost" wartości funkcji wynosi 0, co znaczy, że funkcja jest stała.

Wnioskowanie zaprezentowane powyżej jest prawdziwe tylko w przypadku funkcji liniowej.

Twierdzenie 2.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:
a) rosnąca wtedy, gdy $a > 0$
b) malejąca wtedy, gdy $a < 0$
c) stała wtedy, gdy $a = 0$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $y = (5 - m)x + 3$ jest malejąca.

Funkcja liniowa jest malejąca wtedy, gdy jej współczynnik kierunkowy $(5 - m)$ jest ujemny. Otrzymujemy:

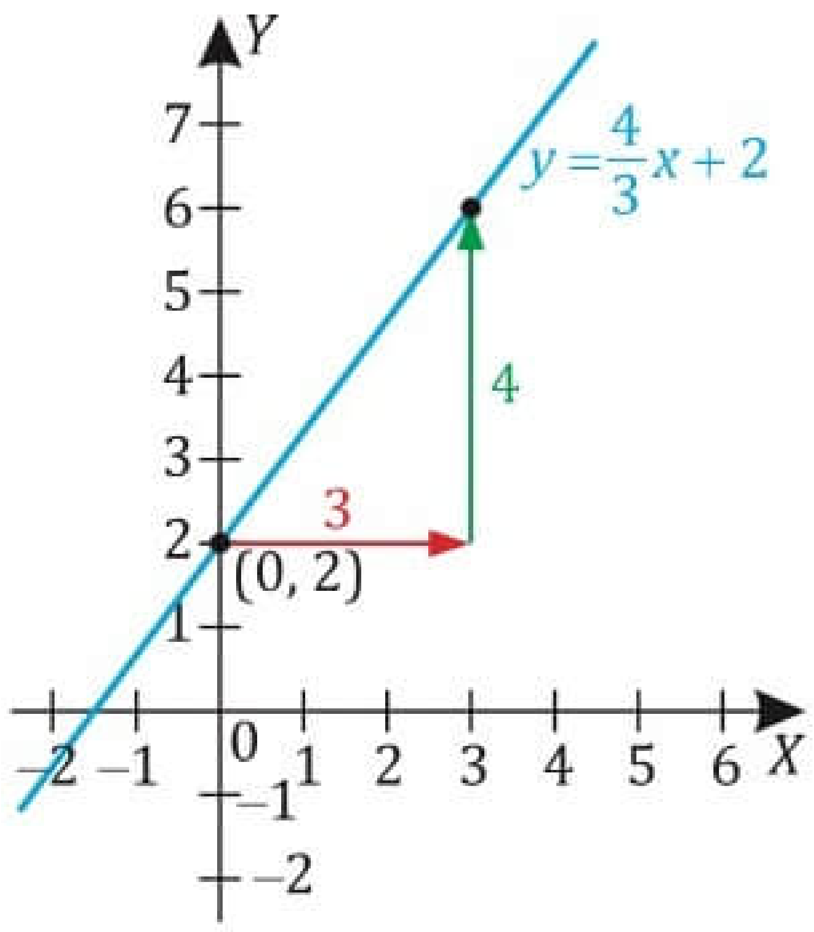
$5 - m < 0$, czyli $5 < m$.

Funkcja jest malejąca wtedy, gdy $m \in (5, +\infty)$.

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak wykorzystać współczynnik kierunkowy, rozumiany jako „przyrost" wartości funkcji, do naszkicowania wykresu funkcji liniowej.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $y = \frac{4}{3}x + 2$.



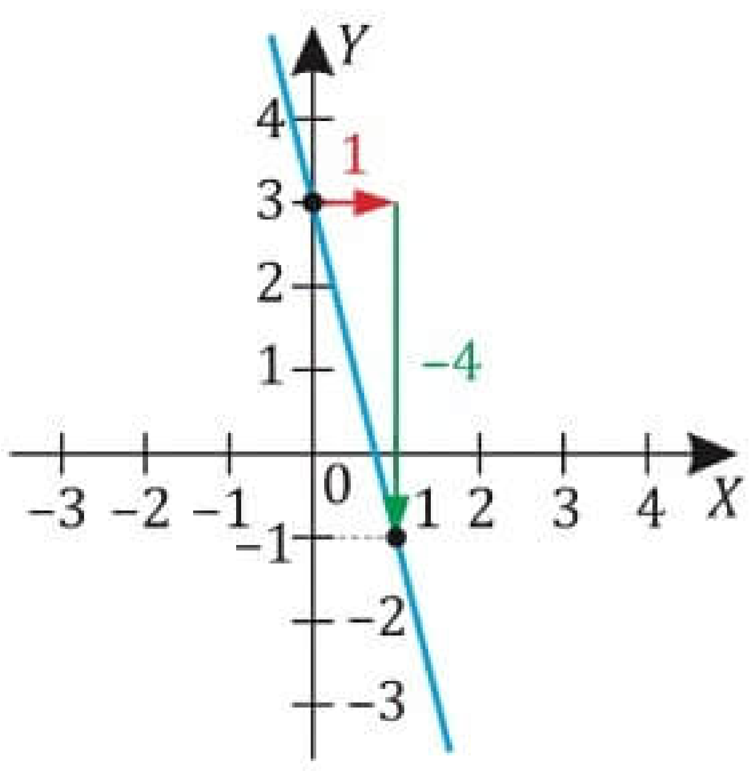
Najpierw wyznaczamy punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY. Bez trudu zauważamy, że jest to punkt o współrzędnych $(0, 2)$.

Wiemy, że wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji równy $\frac{4}{3}$. Zatem proporcjonalnie „przyrost" argumentu o 3 powoduje „przyrost" wartości funkcji o 4 (trzykrotnie większy przyrost argumentu powoduje trzykrotnie większy „przyrost" wartości). To spostrzeżenie pozwala wyznaczyć drugi punkt należący do wykresu funkcji: $(0+3, 2+4)$, czyli $(3, 6)$.

Wykres funkcji przedstawia rysunek powyżej.

Przykład 4.

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Na podstawie tego wykresu napiszemy wzór funkcji.



Wzór funkcji liniowej ma postać $y = ax + b$. Odczytujemy z rysunku współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY: $(0, 3)$, zatem wyraz wolny jest równy 3,

$b = 3$.

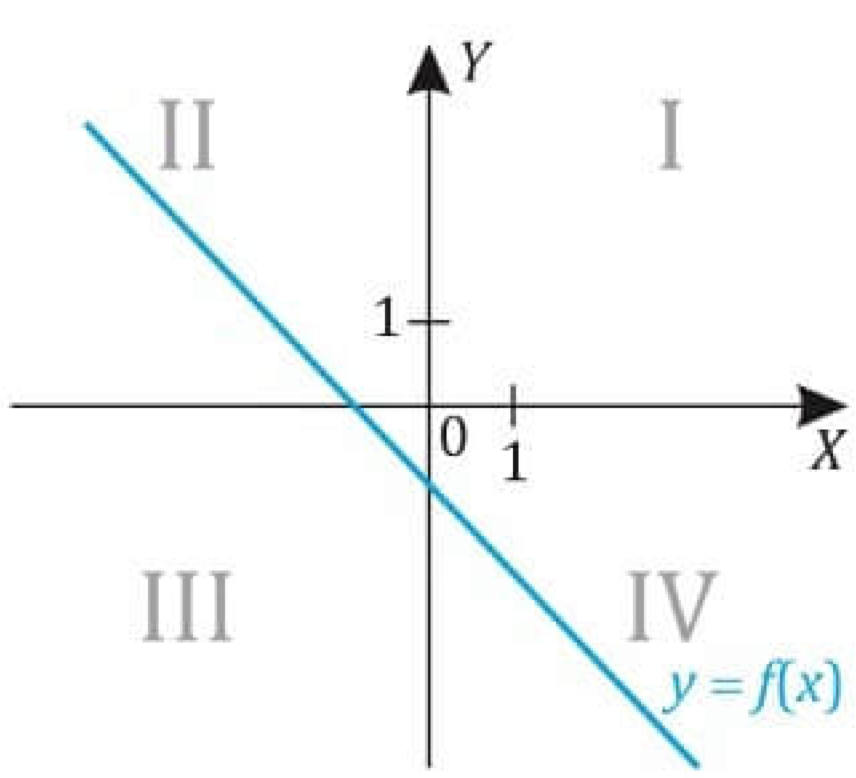
Odliczamy „przyrost" wartości funkcji dla przyrostu argumentu równego 1; otrzymujemy -4, więc $a = -4$.

Wzór funkcji przedstawionej na wykresie to

$y = -4x + 3$.

Przykład 5.

Określimy znaki współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, wiedząc, że wykres funkcji f przechodzi przez drugą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych.



Prosta, która przechodzi przez trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych, przecina oś OY w punkcie leżącym poniżej punktu $(0, 0)$. Zatem

$b < 0$

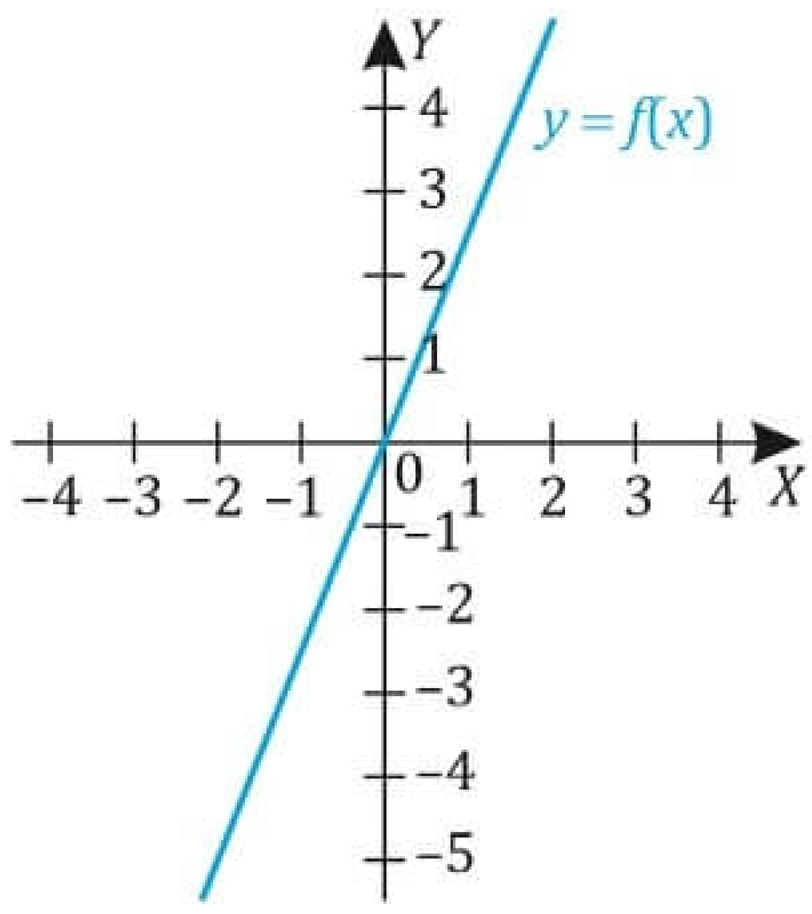
(patrz rysunek obok). Wykres funkcji przechodzi również przez II ćwiartkę. Zatem funkcja f jest malejąca. Stąd

$a < 0$.

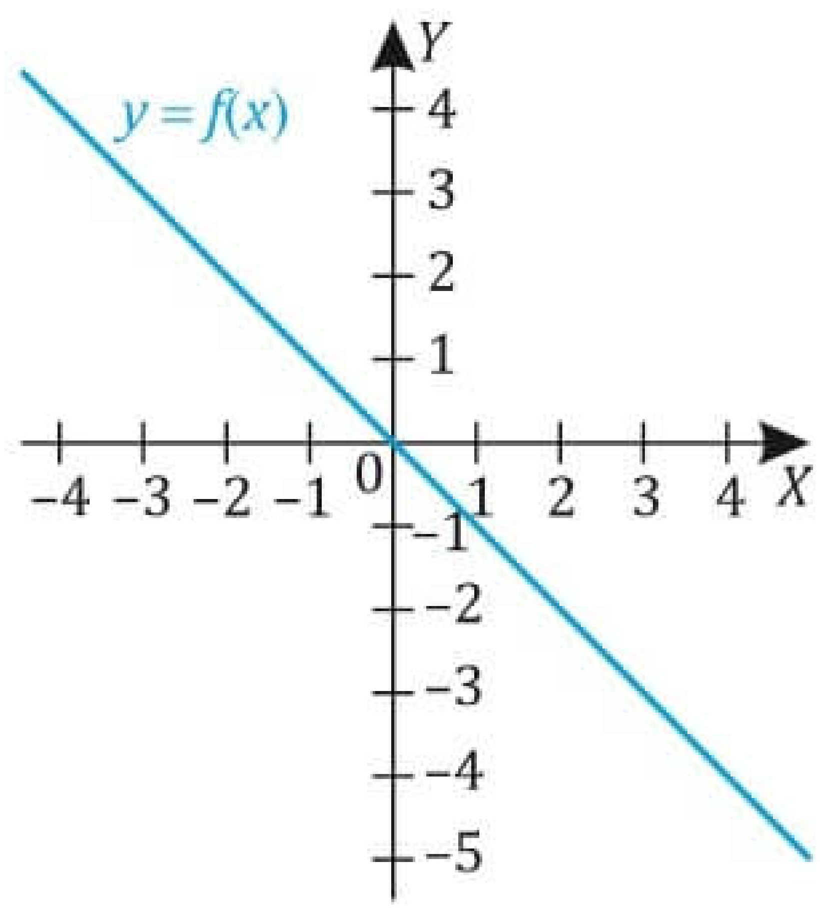
Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych wtedy, gdy współczynniki a i b są ujemne.

Na koniec tego tematu zastanówmy się, jak są położone w układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych opisanych równaniami mającymi postać $y = ax$ (wówczas $b = 0$). Przeanalizujmy przykłady:

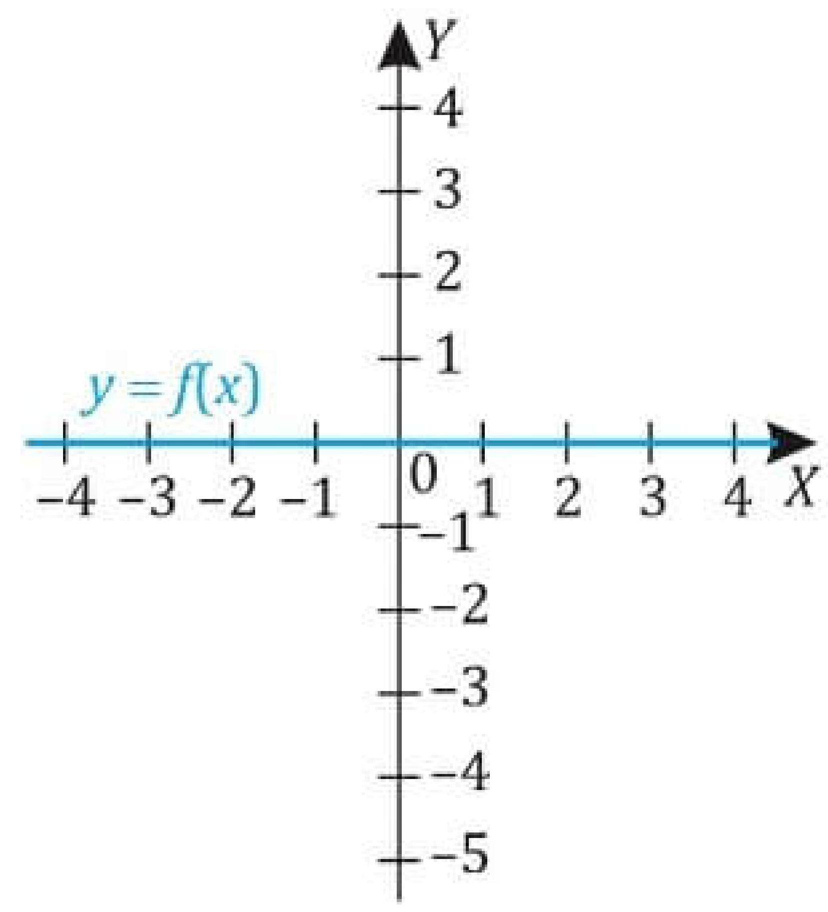
a) $f(x) = 2{,}5x$



b) $f(x) = -x$



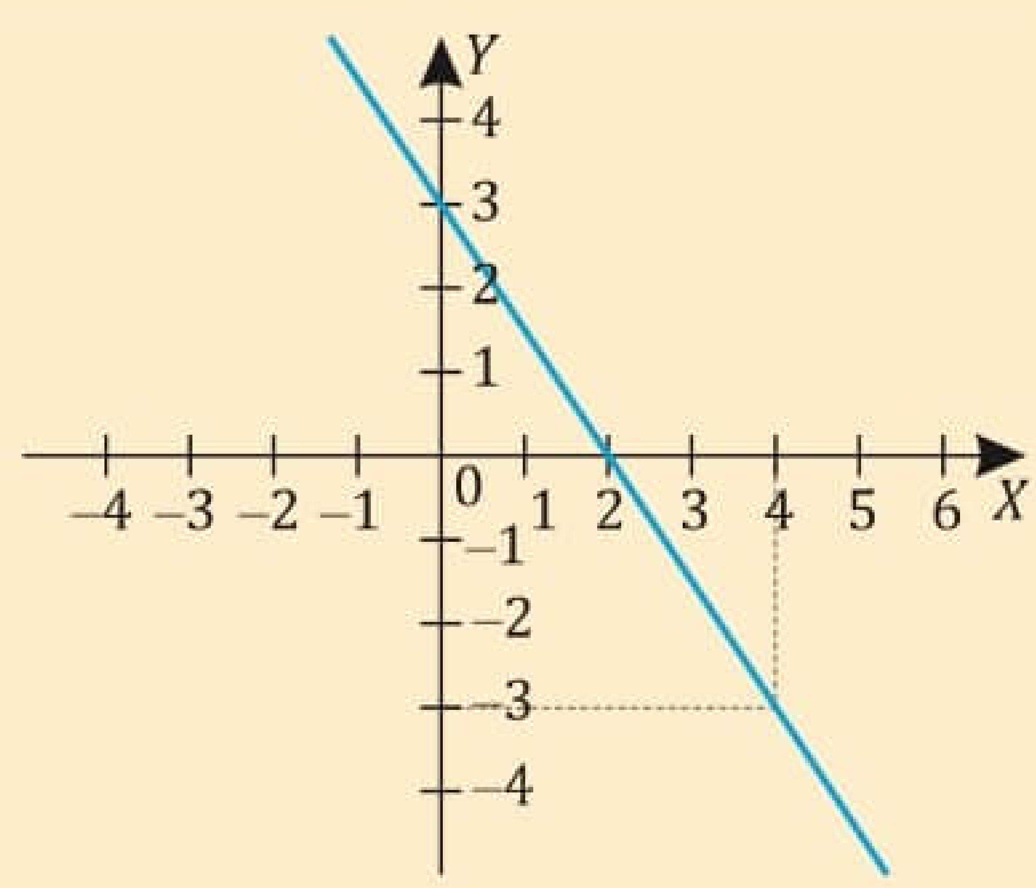
c) $f(x) = 0$



Jeśli $a > 0$, wówczas prosta przechodzi przez I i III ćwiartkę układu współrzędnych; jeśli $a < 0$, to prosta przechodzi przez II i IV ćwiartkę, natomiast w przypadku, gdy $a = 0$, wykres funkcji pokrywa się z osią OX.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Naszkicuj wykresy funkcji liniowych:
   a) $y = 5x + 1$ b) $y = -2x + 6$ c) $y = \frac{2}{3}x - 4$
2. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Odczytaj wartości współczynników i napisz wzór tej funkcji.
3. Punkty A i B należą do wykresu funkcji liniowej. Podaj wzór tej funkcji, jeśli:
   a) $A(0, 0)$ $B(2, -8)$ b) $A(0, 5)$, $B(1, 3)$
   c) $A(3, 0)$, $B(0, -7)$ d) $A(-4, 0)$, $B(-6, -1)$



4. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (3 + m)x - m + 2$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których:
   a) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 7)$ b) funkcja jest rosnąca.