Największa i najmniejsza wartość funkcji liczbowej

W tym temacie jeszcze raz zajmiemy się wartościami funkcji. Interesować nas będzie, czy funkcja określona w danym zbiorze przyjmuje w tym zbiorze wartość najmniejszą lub największą.

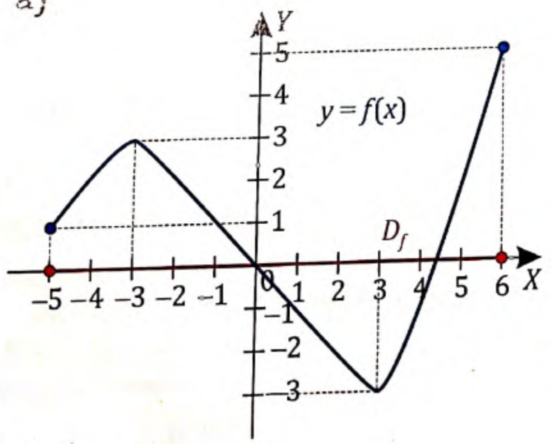
Definicja 1.
Funkcja liczbowa $f\colon X \to Y$ przyjmuje **największą wartość** y_0, $y_0 \in Y$, dla liczby x_0, $x_0 \in X$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdej liczby x, $x \in X$, zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Definicja 2.
Funkcja liczbowa $f\colon X \to Y$ przyjmuje **najmniejszą wartość** y_0, $y_0 \in Y$, dla liczby x_0, $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdej liczby x, $x \in X$, zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Przykład 1.

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy czterech funkcji f, h, g oraz t. Odczytamy (o ile istnieje) najmniejszą oraz największą wartość każdej funkcji.

a)

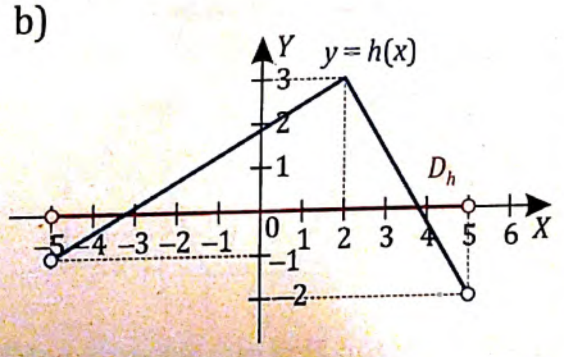


Dziedziną funkcji jest zbiór

$D_f = \langle -5, 6 \rangle$.

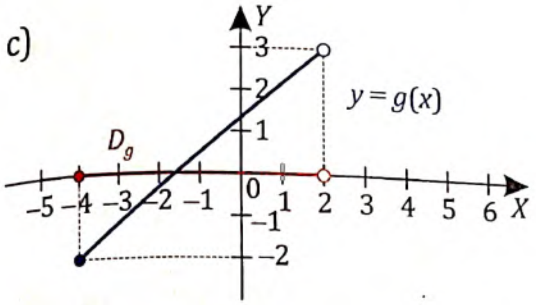
Funkcja f przyjmuje największą wartość 5 dla argumentu 6,
bo dla każdej liczby x, $x \in D_f$, $f(6) \geqslant f(x)$.
Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość -3 dla argumentu 3,
bo dla każdej liczby x, $x \in D_f$, $f(3) \leqslant f(x)$.

b)



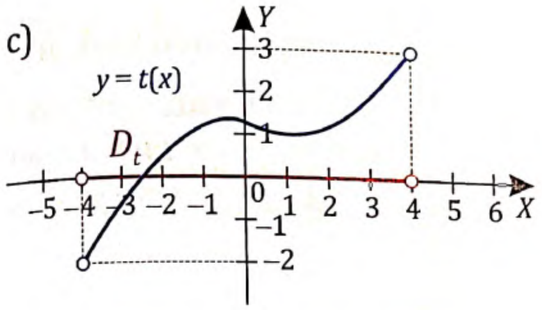
Funkcja h przyjmuje największą wartość 3 dla argumentu 2.
Nie przyjmuje najmniejszej wartości.
Wartości funkcji h są „bardzo bliskie” wartości równej -2, ale wartości -2 funkcja nie przyjmuje. Wśród liczb większych od -2 nie ma liczby najmniejszej.

c)



Funkcja g nie przyjmuje wartości największej. Najmniejszą wartością funkcji g jest –2. Wartość tę funkcja przyjmuje dla argumentu –4.

c)



Funkcja t nie przyjmuje ani wartości największej, ani najmniejszej.

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem największej oraz najmniejszej wartości funkcji określonej wzorem.

Przykład 2.

Wyznaczymy najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = -3x + 4$, gdzie $x \in \langle 2, 5\rangle$.

Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 2, 5\rangle$, więc argumenty funkcji spełniają nierówność:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$

Oszacujemy wartość wyrażenia $-3x + 4$, korzystając z własności nierówności w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Otrzymujemy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \quad / \cdot (-3)$$

$$-6 \geqslant -3 \cdot x \geqslant -15 \quad / + 4$$

$$-2 \geqslant -3x + 4 \geqslant -11, \text{ zatem}$$

$$-11 \leqslant f(x) \leqslant -2$$

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

$$\langle -11, -2\rangle$$

Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą –11. Wartość największa funkcji f to –2.

Naszkicuj wykres funkcji f i sprawdź na rysunku otrzymane wyniki.

Czasami do wyznaczenia najmniejszej (największej) wartości danej funkcji posługujemy się wykresami lub własnościami innych funkcji.

Przykład 3.

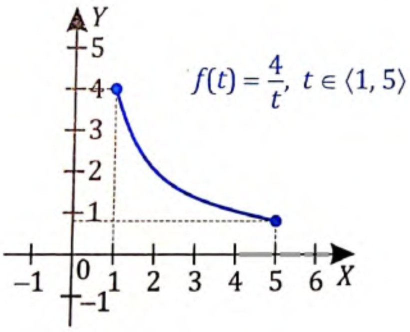
Wyznaczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji $f(x) = \frac{4}{2x-1}$, gdzie $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

W tym przypadku rozwiążemy zadanie w dwóch etapach.
I etap Najpierw określimy wartość wyrażenia $(2x-1)$ występującego w mianowniku we wzorze funkcji f, wiedząc, że $x \in \langle 1, 3 \rangle$.
II etap Określimy zbiór wartości danej funkcji, posługując się wykresem funkcji $f(t) = \frac{4}{t}$, gdzie $t = 2x - 1$.

Ad I Korzystając z własności nierówności w zbiorze $\boldsymbol{R}$, otrzymujemy:

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \quad / \cdot 2$$
$$2 \leqslant 2x \leqslant 6 \quad / -1$$
$$1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 5$$
$$(2x-1) \in \langle 1, 5 \rangle$$

Wyrażenie $2x-1$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle 1, 5 \rangle$.
Ad II Wprowadzamy podstawienie: $t = 2x - 1$, gdzie $t \in \langle 1, 5 \rangle$ i wyznaczamy zbiór wartości funkcji $f(t) = \frac{4}{t}$, gdzie $t \in \langle 1, 5 \rangle$, na podstawie wykresu tej funkcji.



Otrzymujemy:

$$f(1) = \frac{4}{1} = 4 \ \text{ oraz } \ f(5) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Zatem funkcja

$$f(x) = \frac{4}{2x-1}, x \in \langle 1, 3 \rangle$$

przyjmuje najmniejszą wartość równą 0,8. Największa wartość tej funkcji to 4.

Przykład 4.

Wykażemy, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przyjmuje największą wartość równą 2 i najmniejszą wartość równą 0.

Założenie: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}, x \in \boldsymbol{R}$

Teza: funkcja f przyjmuje największą wartość równą 2 i najmniejszą wartość równą 0

Dowód: Najpierw zapiszemy wzór funkcji f w innej postaci:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2+4} = \frac{x^2-4x+4}{x^2+4} = \frac{(x^2+4)-4x}{x^2+4} = \frac{x^2+4}{x^2+4} - \frac{4x}{x^2+4} = 1 - \frac{4x}{x^2+4},$$ zatem

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+4}, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}.$$

Aby wyznaczyć najmniejszą (największą) wartość funkcji, należy określić wartość wyrażenia $\frac{4x}{x^2+4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. W tym celu rozważymy funkcję $h(x) = \frac{4x}{x^2+4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, i wyznaczymy jej zbiór wartości. Funkcja h jest funkcją nieparzystą (udowodnij ten fakt!), więc jej wykres jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$. Jeśli wyznaczymy największą wartość funkcji h, bez trudu wskażemy też jej wartość najmniejszą. Dla dowolnej liczby rzeczywistej prawdziwa jest nierówność:

$(x-2)^2 \geqslant 0$, stąd $x^2-4x+4 \geqslant 0$, czyli

$x^2+4 \geqslant 4x \; / : (x^2+4)$ (wyrażenie x^2+4 jest dodatnie dla dowolnej liczby $x \in \boldsymbol{R}$), stąd

$1 \geqslant \frac{4x}{x^2+4}$, dla dowolnej liczby $x \in \boldsymbol{R}$.

Zauważ, że funkcja $h(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ przyjmuje największą wartość równą 1, dla argumentu 2. Zatem jej najmniejszą wartością jest -1 (dla argumentu -2). Zatem

$-1 \leqslant \frac{4x}{x^2+4} \leqslant 1 \quad / \cdot (-1)$, czyli $-1 \leqslant -\frac{4x}{x^2+4} \leqslant 1 \quad / +1$, skąd

$0 \leqslant 1 - \frac{4x}{x^2+4} \leqslant 2$

Wobec tego funkcja $f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+4}$ przyjmuje najmniejszą wartość równą 0, a największą równą 2.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji f (o ile istnieją) na podstawie wykresu funkcji, jeśli:
   a) $f(x) = x^2, x \in \langle -2, 3)$
   b) $f(x) = \sqrt{x}, x \in \langle 2, 8 \rangle$
   c) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \langle 1, +\infty)$
   d) $f(x) = [x], x \in (-1, 3)$.
2. Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji f określonej wzorem:
   a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 100, x \in \langle -8, 50 \rangle$
   b) $f(x) = \frac{5}{4x+2}, x \in \langle 1, 6 \rangle$
   c) $f(x) = \sqrt{2x+1}, x \in \langle 4, 12 \rangle$
   d) $f(x) = (3x-1)^2, x \in \langle -5, 4 \rangle$.
3. Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$ przyjmuje największą wartość równą 4, a najmniejszą równą 2.