Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach

Poznałeś wiele terminów dotyczących funkcji, takich jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, różnowartościowość funkcji. Teraz uporządkujemy Twoje wiadomości i trochę je rozszerzymy o takie pojęcia, jak: wartości dodatnie i ujemne funkcji.

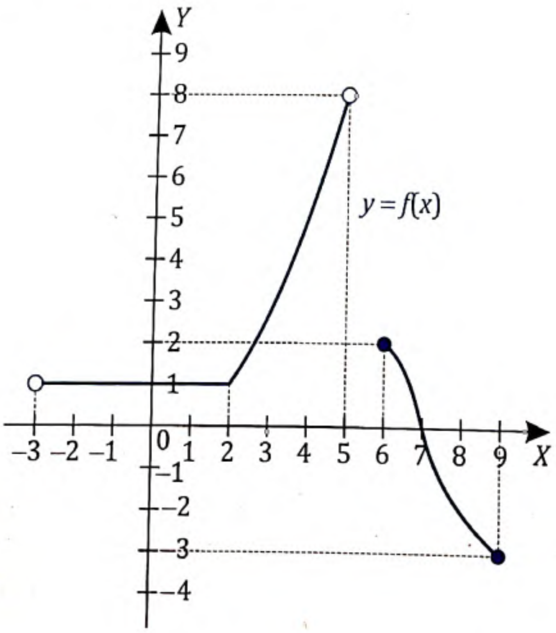
Bardzo ważną umiejętnością jest odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Podając własności funkcji, zwracamy uwagę na następujące elementy:

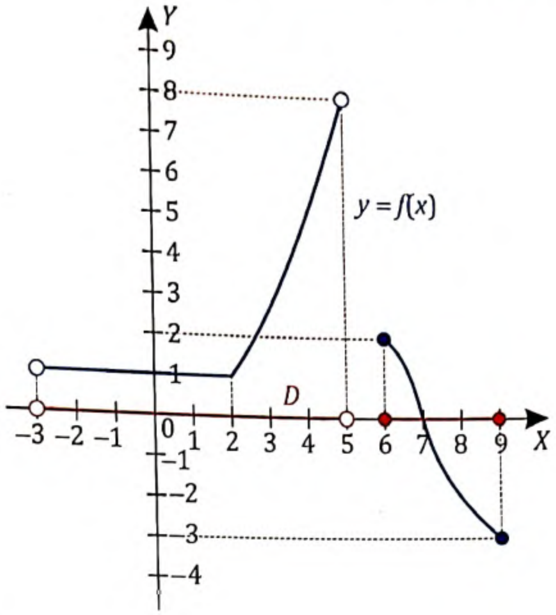
1. Jaka jest dziedzina funkcji?
2. Jaki jest zbiór wartości funkcji?
3. Czy funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to jakie?
4. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne?
5. W jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca, a w jakich stała?
6. Czy funkcja jest różnowartościowa (parzysta, nieparzysta, okresowa)?
7. Czy funkcja osiąga wartość największą, czy osiąga wartość najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu?

Przykład 1.

Omówmy (według porządku podanego powyżej) własności funkcji, której wykres przedstawiony jest na poniższym rysunku.

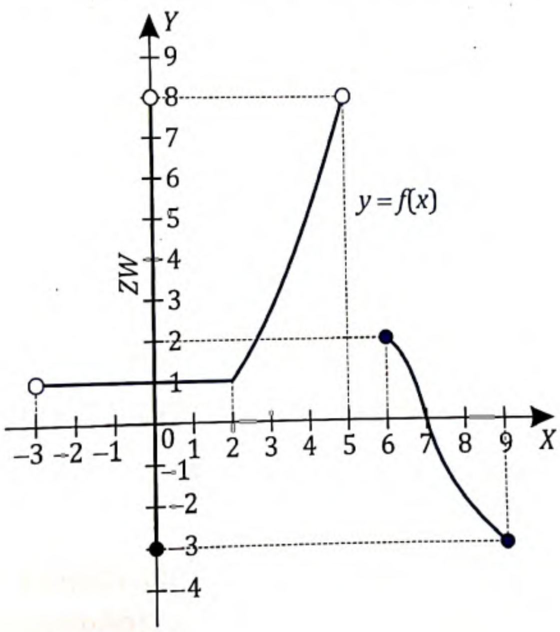


1. Dziedzina funkcji
   Dziedzina funkcji jest zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym.



$D_f = (-3, 5) \cup \langle 6, 9 \rangle$

2. Zbiór wartości funkcji
   Zbiór wartości funkcji f jest zaznaczony na rysunku kolorem zielonym.

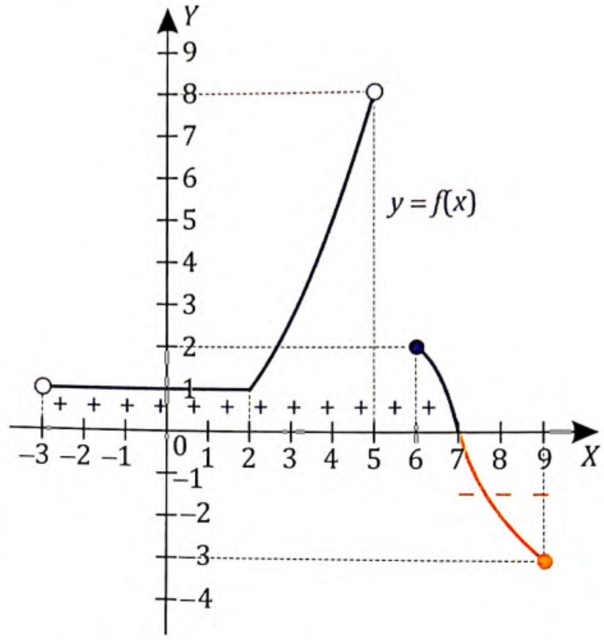


$ZW_f = \langle -3, 8)$

3. Miejsca zerowe funkcji to pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu tej funkcji i osi OX. Wykres funkcji f ma tylko jeden punkt wspólny z osią OX. Jest to punkt o współrzędnych $(7, 0)$. Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe, równe 7.

   $f(x) = 0$, jeśli $x = 7$

4. Zauważ, że miejsce zerowe funkcji podzieliło wykres funkcji w taki sposób, że część wykresu znajduje się nad osią OX (kolor fioletowy), zaś część wykresu znajduje się pod osią OX (kolor pomarańczowy). Część wykresu położona nad osią OX (kolor fioletowy) „informuje" nas o dodatnich wartościach funkcji, zaś część wykresu położona pod osią OX (kolor pomarańczowy) „informuje" nas o ujemnych wartościach funkcji.



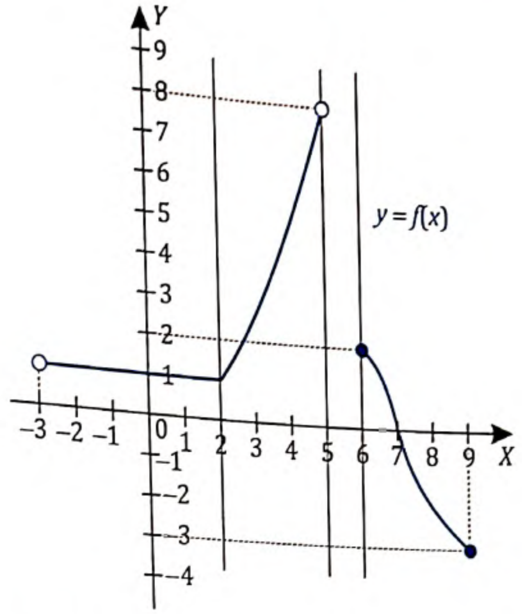
Aby odczytać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, wystarczy znaleźć na osi OX te argumenty, które „odpowiadają fioletowej części wykresu". Bez trudu odczytujemy, że funkcja osiąga wartości dodatnie wtedy, gdy $x \in (-3, 5) \cup \langle 6, 7)$. Ten fakt możemy zapisać krócej w następujący sposób:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 5) \cup \langle 6, 7)$$

Aby odczytać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, wystarczy znaleźć na osi OX te argumenty, które „odpowiadają pomarańczowej części wykresu". Bez trudu odczytujemy, że funkcja osiąga wartości ujemne wtedy, gdy $x \in (7, 9\rangle$. Ten fakt możemy zapisać krócej w następujący sposób:

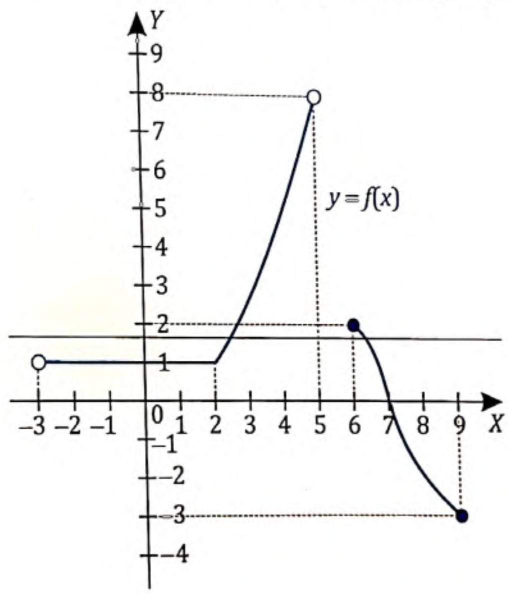
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (7, 9\rangle$$

5. Aby podać przedziały monotoniczności funkcji (zbiory, w których funkcja jest malejąca, rosnąca lub stała), dzielimy wykres (jednocześnie dzielimy dziedzinę funkcji) prostymi prostopadłymi do osi OX (proste pionowe) na charakterystyczne części:



Na tej podstawie stwierdzamy, że funkcja jest rosnąca w przedziale ⟨2, 5), malejąca w przedziale ⟨6, 9⟩, zaś stała w przedziale (–3, 2⟩.

6. Funkcja nie jest różnowartościowa, istnieje bowiem prosta równoległa do osi OX (pozioma), która przecina wykres w więcej niż jednym punkcie.



7. Odczytaliśmy już z wykresu zbiór wartości funkcji f. Interesuje nas, czy funkcja f osiąga największą (najmniejszą) wartość, a jeśli tak, to dla jakiego argumentu?

   Najmniejszą wartość równą (–3) funkcja osiąga dla argumentu 9. Największej wartości funkcja nie osiąga. Jej wartości są „bardzo bliskie" wartości równej 8, ale wartości 8 funkcja nie przyjmuje (punkt o współrzędnych (5, 8) nie należy do wykresu funkcji f). Wśród liczb mniejszych od 8 nie ma liczby największej. Stwierdzamy zatem, że funkcja nie przyjmuje największej wartości.

Równie ważną umiejętnością jak „czytanie" wykresu funkcji jest szkicowanie wykresu funkcji o zadanych własnościach.

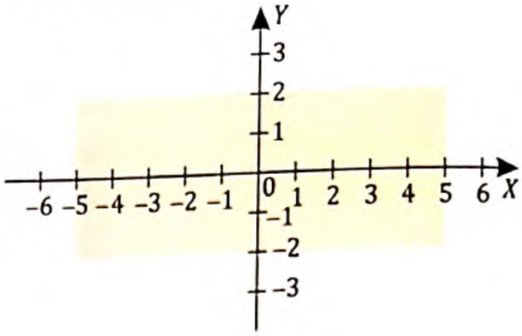
Przykład 2.

Naszkicujemy wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
- dziedziną D_f funkcji jest przedział $\langle -5, 5\rangle$
- zbiorem wartości ZW_f funkcji jest przedział $\langle -2, 2\rangle$
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0, 3\rangle$, zaś malejąca w przedziale $\langle 3, 5\rangle$
- funkcja ma jedno miejsce zerowe
- $f(5) = \frac{1}{2}$
- funkcja jest nieparzysta.

Kolejne etapy Twojej pracy mogłyby wyglądać następująco.

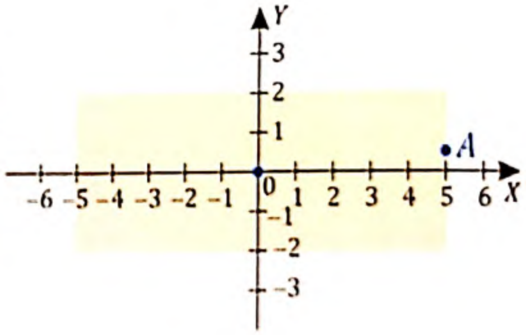
I etap

Najpierw ustalamy obszar, w którym znajduje się wykres funkcji. Pomoże nam w tym znajomość dziedziny, $D_f = \langle -5, 5\rangle$ oraz zbioru wartości funkcji, $ZW_f = \langle -2, 2\rangle$.



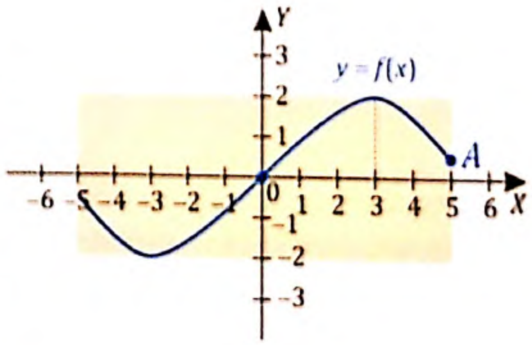
II etap

W wyznaczonym obszarze zaznaczamy najpierw punkty charakterystyczne wykresu. Są to:
- punkt $O(0, 0)$ – bo funkcja ma jedno miejsce zerowe i jest nieparzysta
- punkt $A\left(5, \frac{1}{2}\right)$, bo $f(5) = \frac{1}{2}$.

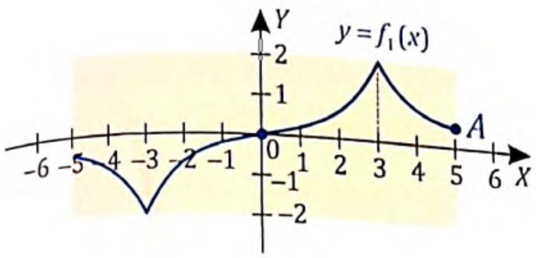


III etap

Szkicujemy wykres funkcji tak, aby były spełnione pozostałe warunki:
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0, 3\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 3, 5\rangle$
- funkcja jest nieparzysta, więc jej wykres jest symetryczny względem punktu $O(0, 0)$.



Powstaje pytanie, czy istnieje tylko jedna funkcja, która spełnia podane warunki. Oczywiście, że nie. Takich funkcji jest nieskończenie wiele. Naszkicujmy zatem wykres innej funkcji.

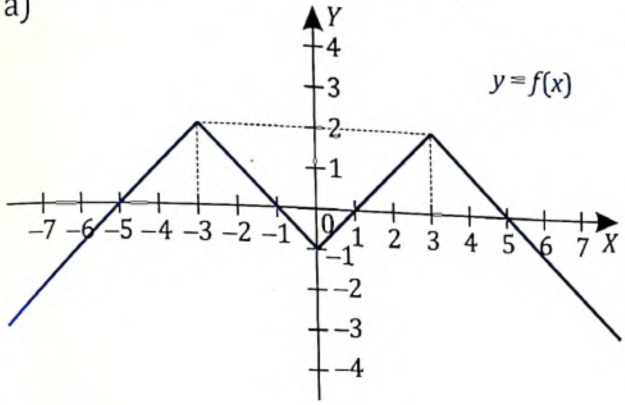


Sprawdź, że funkcja f_1 spełnia wszystkie zadane warunki.

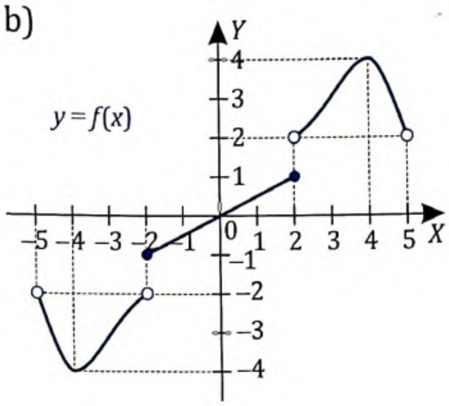
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na poniższym rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu własności tej funkcji.

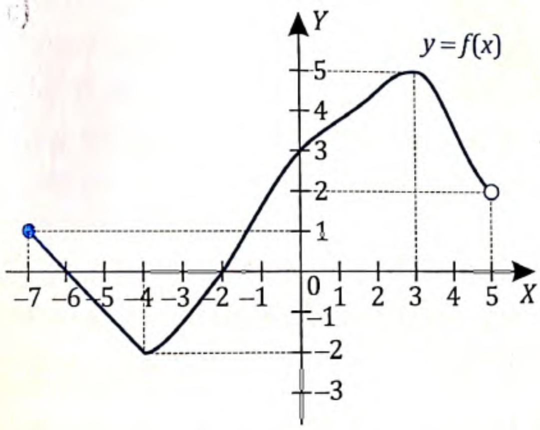
a)



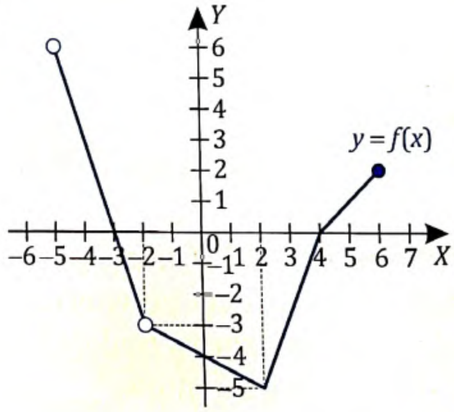
b)



c)



d)



2. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy dwóch funkcji, z których każda spełnia jednocześnie następujące warunki:
   - Dziedziną funkcji jest przedział $(-3, 7)$.
   - Zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -5, 4)$.
   - Funkcja ma trzy miejsca zerowe: (-1), 2, 5.

3. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
   - Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -6, 3\rangle$.
   - Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\langle -1, 2\rangle \cup \langle 4, 6\rangle$.
   - Funkcja ma dwa miejsca zerowe: (-4) oraz 0.
   - Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -6, -2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle -2, 1\rangle$.
   - Do wykresu funkcji należy punkt $A\ (2, 5)$.