Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej

Wiesz już, że wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta przecinająca oś OY w punkcie $(0, b)$. Wyznaczymy teraz współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią OX. W tym celu obliczymy miejsce zerowe funkcji, czyli argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

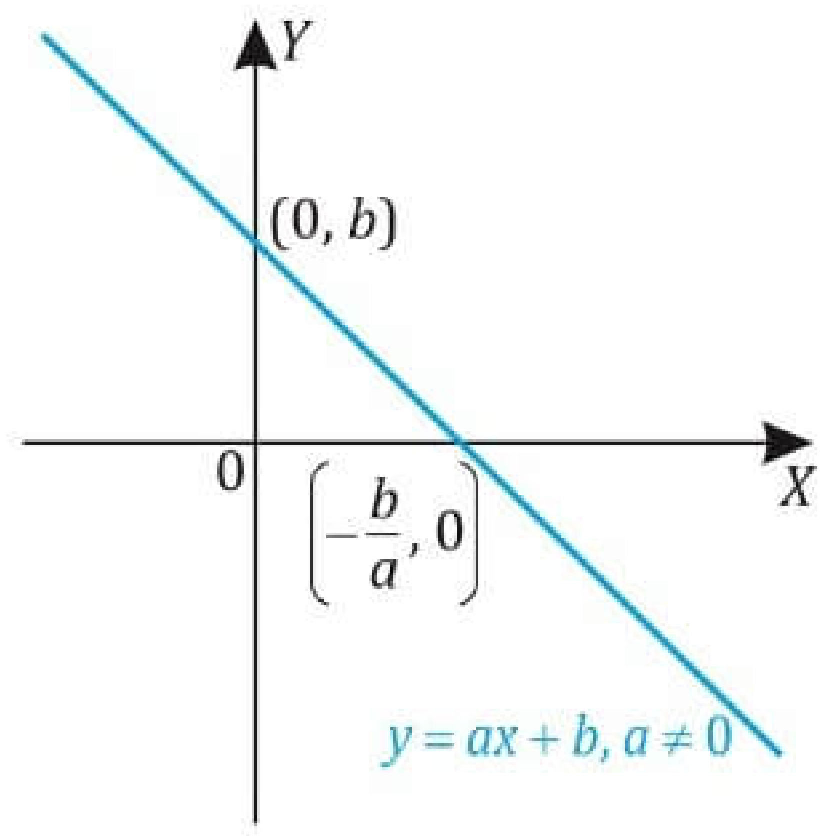
$$y = 0$$
$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$

Jeśli $a \neq 0$, to otrzymujemy

$$x = -\frac{b}{a}$$

Oznacza to, że jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe, równe $-\frac{b}{a}$. Wykres funkcji przecina oś OX w punkcie o współrzędnych

$$\left(-\frac{b}{a},\ 0\right)$$



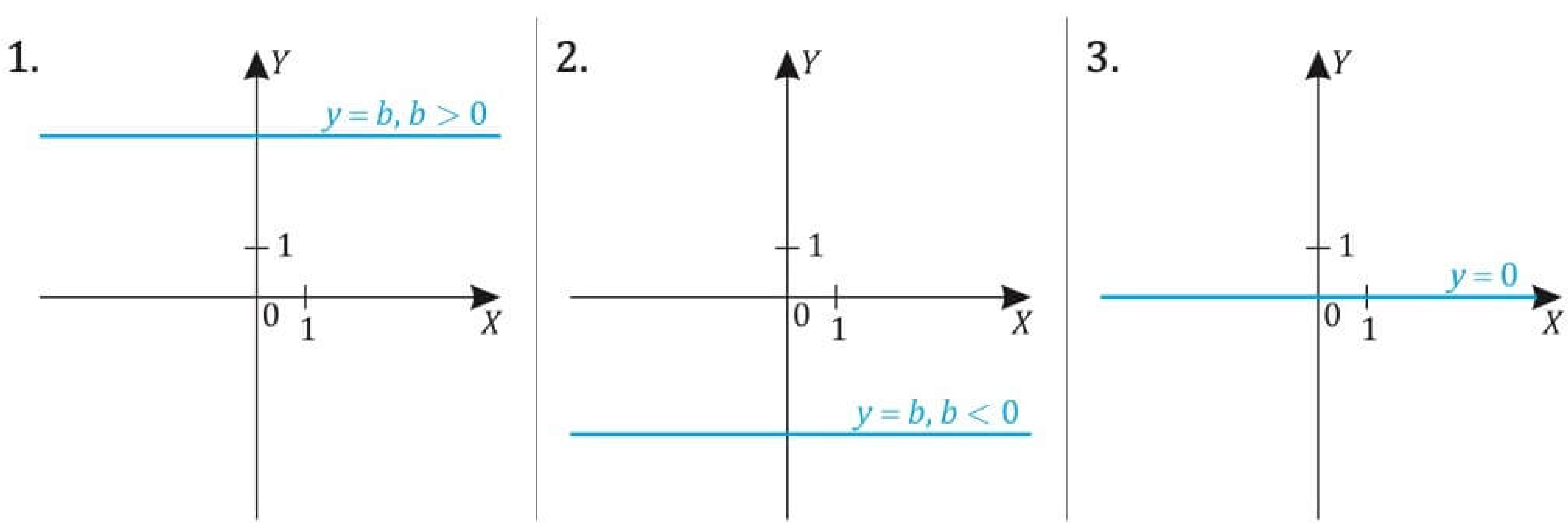
Rozpatrzmy przypadek, gdy $a = 0$. Wówczas wzór funkcji liniowej ma postać

$$y = b$$

Jeśli $b \neq 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych. Jej wykres nie przecina się z osią OX, bo jest do niej równoległy (rysunek 1. i 2. poniżej).
Jeśli $b = 0$, to funkcję opisuje wzór

$$y = 0$$

Wykres funkcji pokrywa się z osią OX. Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje wartość zero. Miejscem zerowym tej funkcji jest każda liczba rzeczywista (rysunek 3. poniżej).



Twierdzenie 1.

1) Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe $-\frac{b}{a}$ wtedy, gdy $a \neq 0$.
2) Funkcja liniowa $y = ax + b$ nie ma miejsc zerowych wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
3) Miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$ jest każda liczba rzeczywista wtedy, gdy $a = b = 0$.

Przykład 1.

Wyznaczymy współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$, wiedząc, że jej wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach o współrzędnych $(0, -4)$ i $(3, 0)$.

Zauważamy, że prosta będąca wykresem danej funkcji nie jest równoległa do osi OX.
Na podstawie współrzędnych danych punktów otrzymujemy

$$b = -4 \quad \text{oraz} \quad -\frac{b}{a} = 3$$

Obliczamy a.

$$-\frac{-4}{a} = 3$$

$$4 = 3a, \text{ czyli } a = \frac{4}{3}.$$

Szukane współczynniki to: $a = \frac{4}{3}$, $b = -4$.

Przykład 2.

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 6$. Wyznaczymy wartość m tak, aby miejscem zerowym funkcji f była liczba -2.

Liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji, to znaczy, że $f(-2) = 0$. Zatem

$$(m - 1) \cdot (-2) + 6 = 0, \quad \text{skąd}$$
$$-2m + 2 + 6 = 0, \quad \text{czyli}$$
$$-2m = -8$$
$$m = 4$$

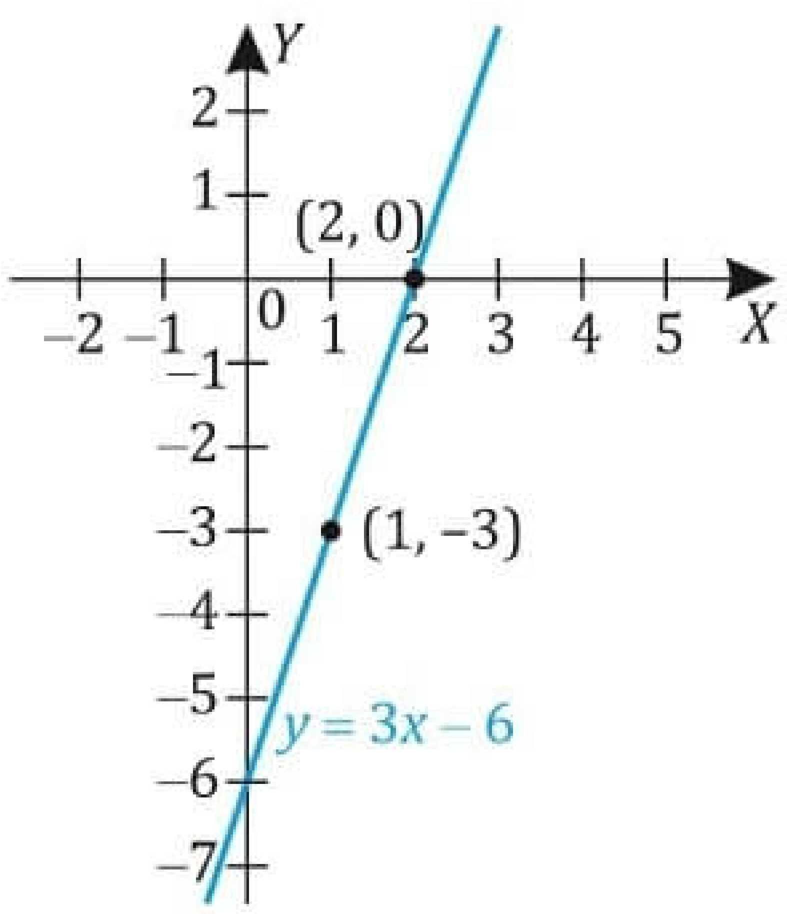
Jeśli $m = 4$, to miejscem zerowym funkcji jest liczba -2.

Przykład 3.

Funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x \in (2, +\infty)$; ponadto dla argumentu 1 przyjmuje wartość -3. Wyznaczymy wzór tej funkcji.

Wzór funkcji liniowej ma postać $y = ax + b$. Obliczymy a i b.
Zastanówmy się nad położeniem prostej, będącej wykresem szukanej funkcji, w układzie współrzędnych. Wiadomo, że punkt $(1, -3)$ należy do tej prostej. Wiemy też, że do prostej należą tylko takie punkty mające drugą współrzędną dodatnią,

których pierwsza współrzędna jest większa od 2. Zatem prosta przecina oś OX w punkcie (2, 0).



Znając współrzędne punktów (1, –3) i (2, 0), odczytujemy, że wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost" wartości funkcji o 3. Znamy więc a.

$a = 3$

Szukany wzór funkcji przyjmuje postać $y = 3x + b$. Pozostaje obliczyć współczynnik b. Podstawiamy do wzoru funkcji współrzędne punktu (1, –3) lub punktu (2, 0):

$-3 = 3 \cdot 1 + b$, stąd

$b = -6$

Wzór funkcji liniowej to $y = 3x - 6$.

Przykład 4.

Dana jest funkcja liniowa $y = \left(4 - m^2\right)x + (m - 2)$. Sprawdzimy, czy istnieje liczba m, dla której ta funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Przyjmijmy oznaczenia współczynników we wzorze funkcji:

$a = 4 - m^2$ i $b = m - 2$

Funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$. Zauważamy, że $b = 0$ tylko wtedy, gdy $m = 2$. Wystarczy wobec tego sprawdzić, jaką wartość ma współczynnik a, jeśli $m = 2$.

$a = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

Funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $m = 2$.

Przykład 5.

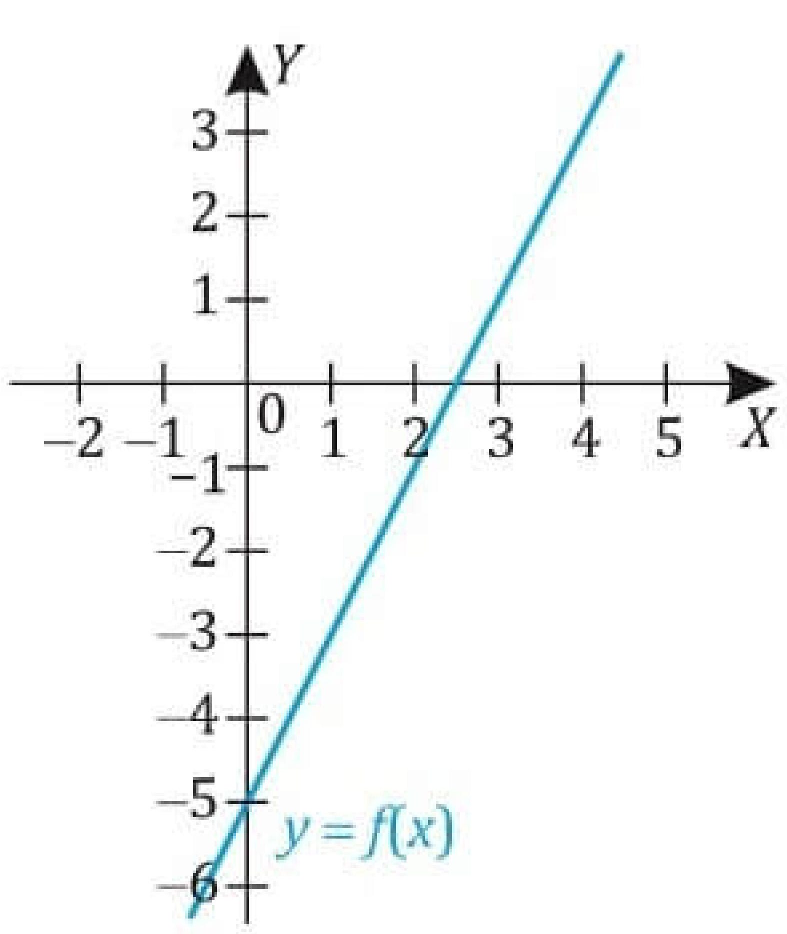
Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 2x - 5$.

a) Wyznaczymy jej miejsce zerowe, naszkicujemy wykres i na podstawie wykresu omówimy jej własności.

b) Rozwiążemy nierówność $f(x + 1) \geqslant 4x + 7$.

Ad a) Miejsce zerowe funkcji obliczymy, jeśli rozwiążemy równanie $f(x) = 0$, czyli

$2x - 5 = 0$, więc $2x = 5$, zatem $x = 2{,}5$.



Własności funkcji f:

1) $D_f = \boldsymbol{R}$.
2) $ZW_f = \boldsymbol{R}$.
3) Miejscem zerowym jest liczba 2,5.
4) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2{,}5, +\infty)$.
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2{,}5)$.
5) Funkcja jest rosnąca.
6) Funkcja jest różnowartościowa.
7) Funkcja nie przyjmuje ani wartości największej, ani najmniejszej.

Ad b)

Ad b) Aby wyznaczyć wyrażenie $f(x+1)$, wystarczy w miejsce x wyrażenia

$2x-5$ wstawić $x+1$.

Otrzymujemy wówczas

$2(x+1)-5$

Rozwiązujemy nierówność

$f(x+1) \geqslant 4x+7$

$2(x+1)-5 \geqslant 4x+7$

$2x+2-5 \geqslant 4x+7$

$2x-3 \geqslant 4x+7 \quad / +3-4x$

$-2x \geqslant 10 \quad / :(-2)$ (dzielimy stronami przez liczbę ujemną, więc zmieniamy znak nierówności na przeciwny)

$x \leqslant -5$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty, -5\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz miejsce zerowe funkcji liniowej f. Następnie podaj zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji są ujemne.
   a) $f(x) = 3x + 6$ b) $f(x) = -0{,}6x + 15$
2. Wykres funkcji liniowej f przecina oś OY w punkcie $(0, -4)$, a wartości ujemne funkcja przyjmuje tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f.
3. Naszkicuj wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -0{,}5x + 5$. Na podstawie tego wykresu omów własności funkcji f.
4. Dany jest wzór funkcji liniowej $f(x) = -x + 2$.
   a) Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x-1)$, podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x-1) \leqslant 4$.
   b) Rozwiąż algebraicznie nierówność $f(x+3) > -f(2x)$.
5. Funkcja liniowa f jest określona za pomocą wzoru $f(x) = (m+5)x - 3m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:
   a) miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2
   b) funkcja jest rosnąca
   c) wykres przechodzi tylko przez I i II ćwiartkę układu współrzędnych.
6. Funkcję liniową g opisuje wzór $g(x) = -3x + 5 - 2m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:
   a) wykres funkcji g przecina oś OY poniżej punktu o współrzędnych $(0, 7)$
   b) miejsce zerowe funkcji g jest liczbą większą od 1.