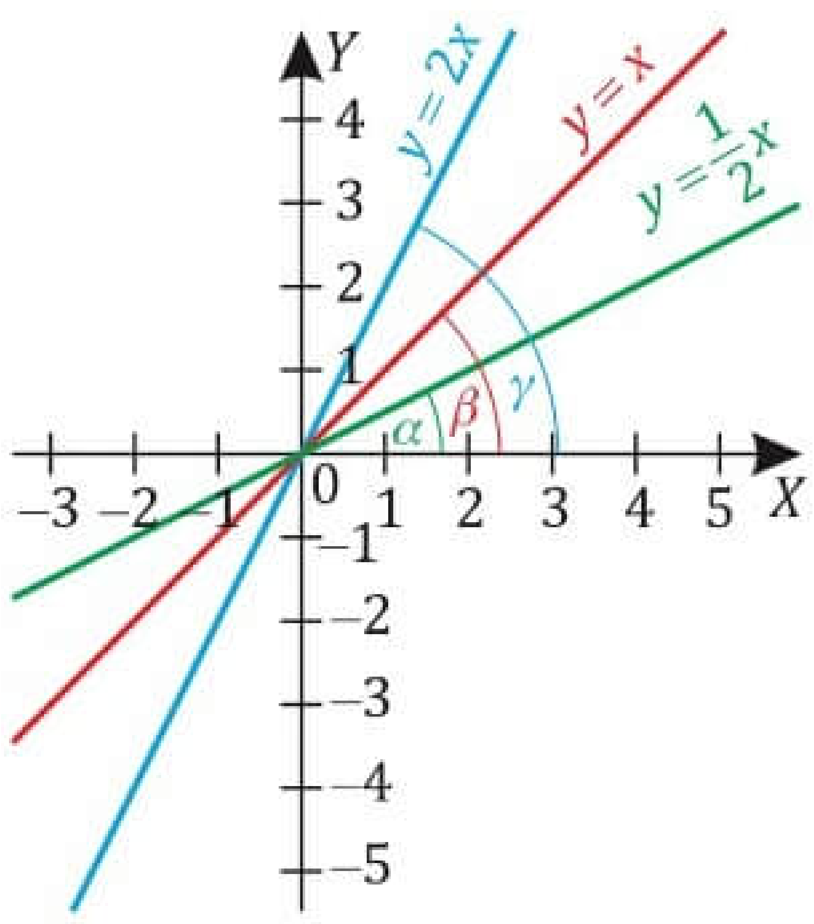
Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej

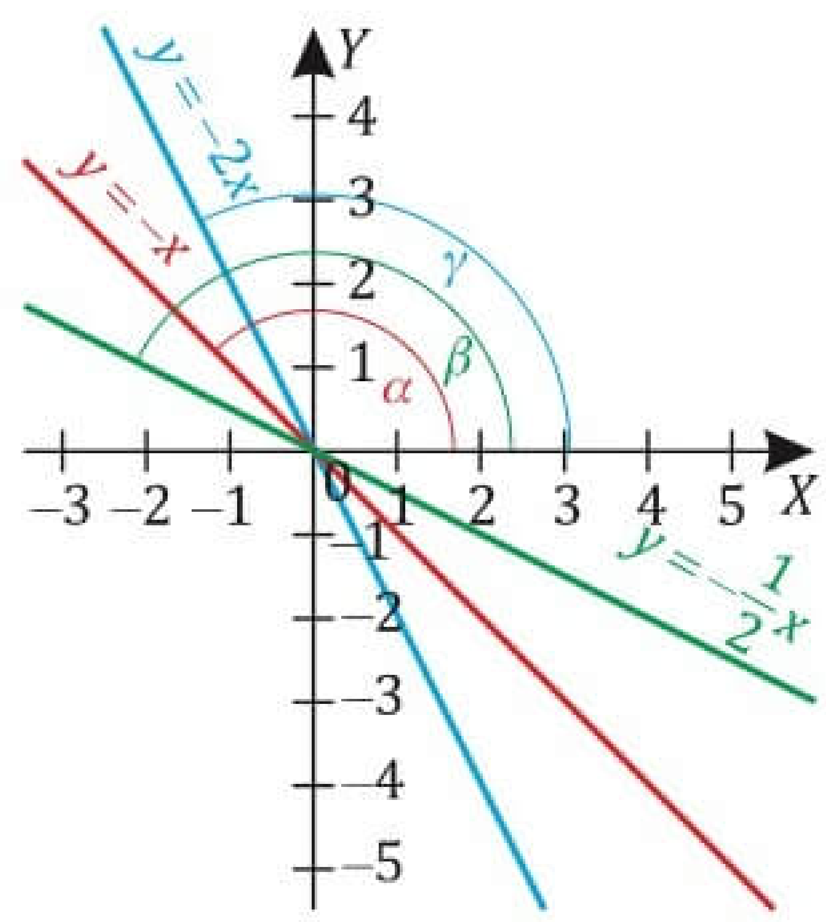
Wiesz już, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ określa „przyrost” wartości funkcji przy wzroście argumentu o 1, natomiast wyraz wolny b wyznacza punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY. Zastanowimy się teraz, jak jeszcze można interpretować te współczynniki. Zaczniemy od współczynnika kierunkowego a.

Rozważymy wykresy funkcji liniowych $y = ax$ wtedy, gdy $a > 0$, $a < 0$ oraz $a = 0$. Rysunki poniżej przedstawiają przykładowe wykresy takich funkcji.

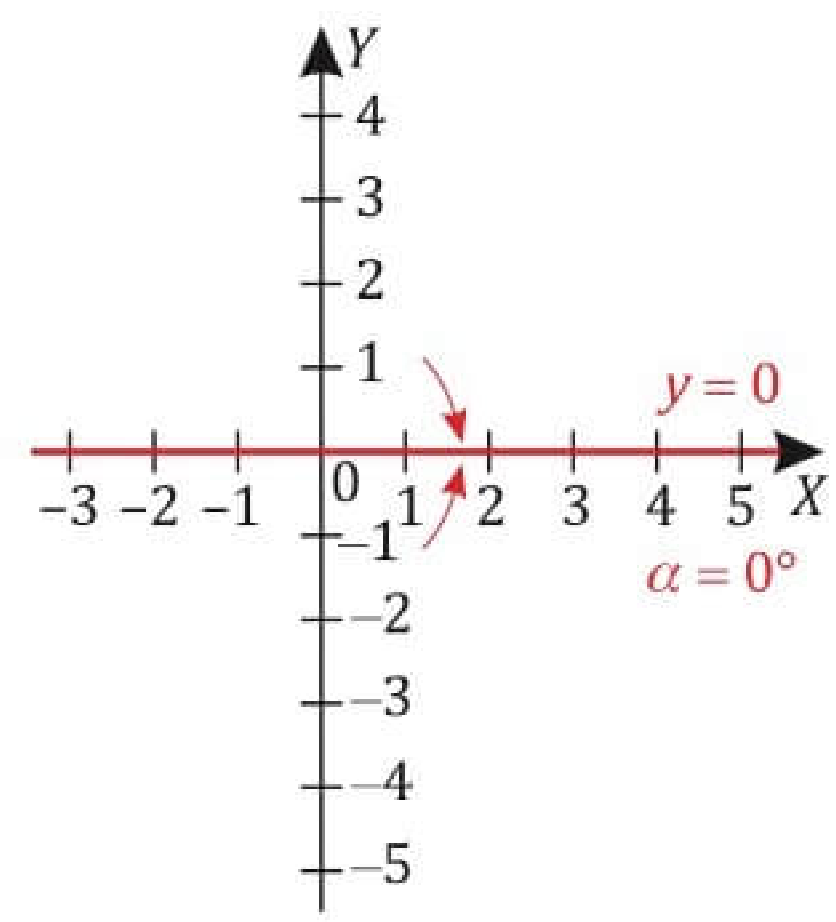
1) $a > 0$



2) $a < 0$



3) $a = 0$



Każdemu wykresowi odpowiada pewien kąt. Jest to tzw. **kąt nachylenia** wykresu funkcji liniowej do osi OX. Jedno ramię takiego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX, a drugie ramię leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych i zawiera się w danym wykresie.

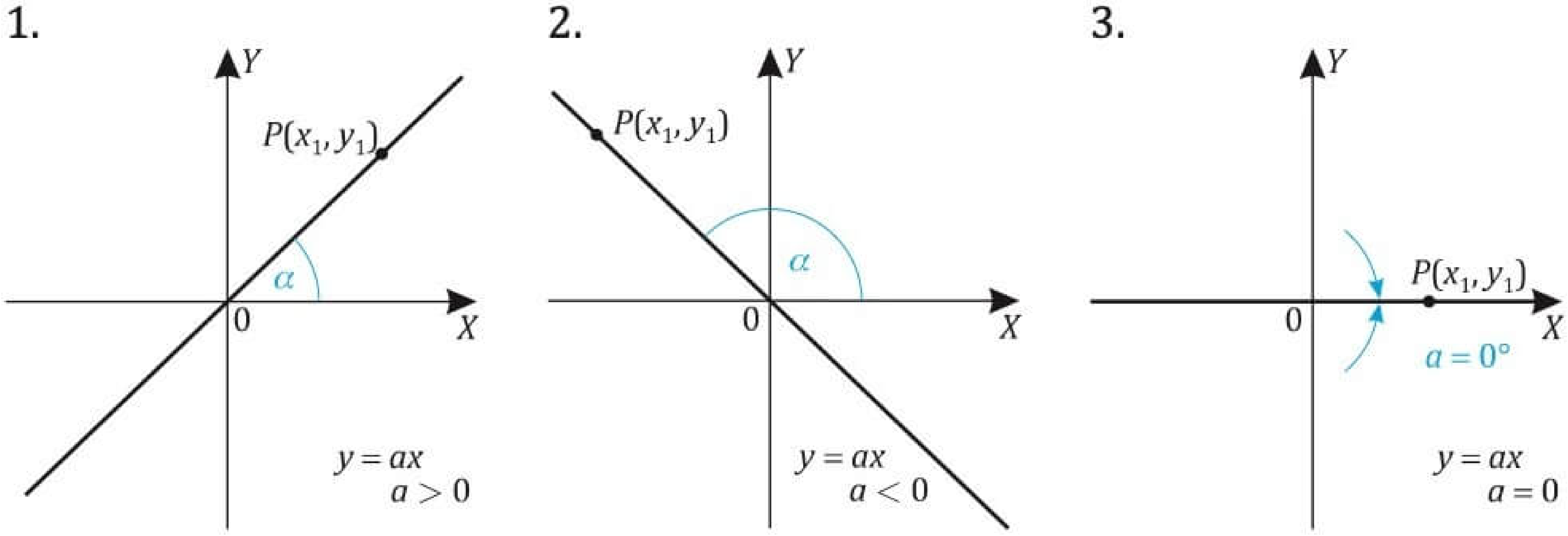
Zauważmy, że:

- jeśli $a > 0$, to kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest kątem ostrym;
- jeśli $a < 0$, to kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest kątem rozwartym;
- jeśli $a = 0$, to przyjmujemy, że kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest równy $0°$.

Łatwo zauważyć, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ ma związek z kątem nachylenia wykresu tej funkcji do osi OX. Dlatego współczynnik kierunkowy nazywamy też **współczynnikiem kątowym**.

Pokażemy, że współczynnik kierunkowy (kątowy) jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX.

Rozważmy ponownie wykresy funkcji liniowych $y = ax$.



Na drugim ramieniu kąta α nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, wybieramy dowolny punkt $P(x_1, y_1)$ różny od punktu $(0, 0)$. Na podstawie definicji tangensa otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Wiemy także, że punkt $P(x_1, y_1)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax$, więc współrzędne punktu P spełniają wzór funkcji, czyli $y_1 = ax_1$. Stąd

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{ax_1}{x_1} = a$$

Udowodniliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 1.
Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax$ jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Przykład 1.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i nachylona do osi OX pod kątem 60°.

Ponieważ prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc jej wzór ma postać

$$y = ax$$

Współczynnik a jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu funkcji do osi OX, czyli

$$a = \operatorname{tg} 60°,$$

skąd

$$a = \sqrt{3}$$

Funkcję liniową opisuje wzór $y = \sqrt{3}x$.

Przykład 2.

Wyznaczymy kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej $y = -x$ do osi OX.

Wyznaczymy kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej $y = -x$ do osi OX.

Współczynnik kierunkowy we wzorze funkcji jest równy -1, zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = -1,$$

gdzie α jest kątem nachylenia wykresu funkcji do osi OX. Z własności tangensa wiadomo, że

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \text{ i } -\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta),$$

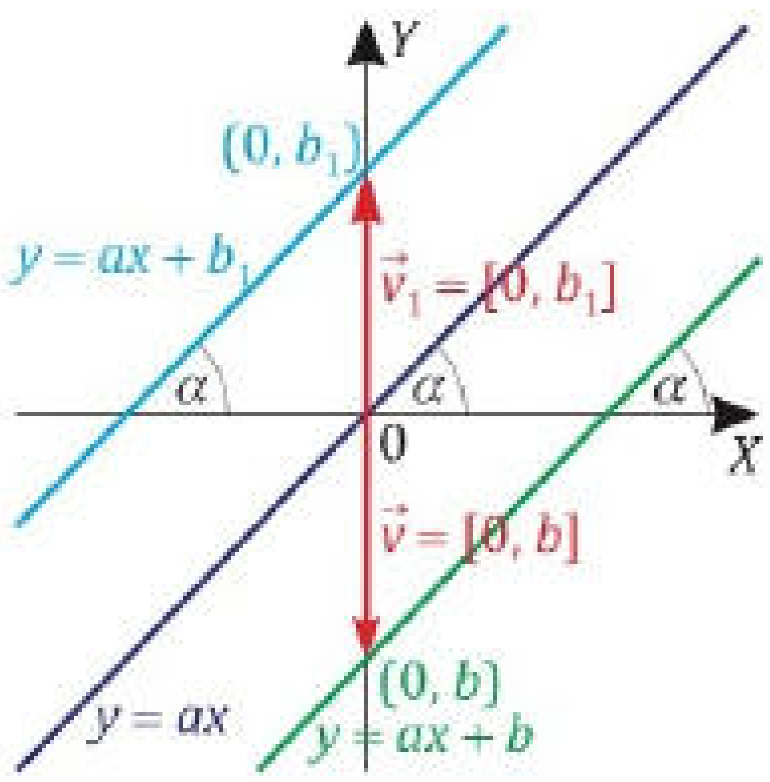
więc

$$-1 = -\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg} 135^\circ,$$

zatem

$$\alpha = 135^\circ$$

Wykres funkcji liniowej $y = -x$ jest nachylony do osi OX pod kątem 135°.



Zauważmy, że wykres funkcji liniowej

$$y = ax + b$$

powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji liniowej

$$y = ax \text{ o wektor } \vec{v} = [0, b].$$

Proste będące wykresami funkcji liniowych

$$y = ax \quad \text{oraz} \quad y = ax + b$$

są równoległe, a więc nachylone do osi OX pod tym samym kątem.
Ilustruje to rysunek obok.

Prawdziwe jest twierdzenie, które podsumowuje nasze rozważania.

Twierdzenie 2.
Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest prosta nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Przykład 3.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty $A\left(\sqrt{3}, -3\right)$ oraz $B(0, -4)$. Następnie ustalimy kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty $A\left(\sqrt{3}, -3\right)$ oraz $B(0, -4)$. Następnie ustalimy kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX.

Zauważamy, że punkt $B(0, -4)$ to punkt wspólny wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ i osi OY, zatem

$$b = -4$$

Wzór funkcji ma więc postać

$$y = ax - 4$$

Punkt $A\left(\sqrt{3}, -3\right)$ należy do wykresu funkcji, więc

$-3 = a \cdot \sqrt{3} - 4$

$a \cdot \sqrt{3} = 1$

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wzór szukanej funkcji to $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$.

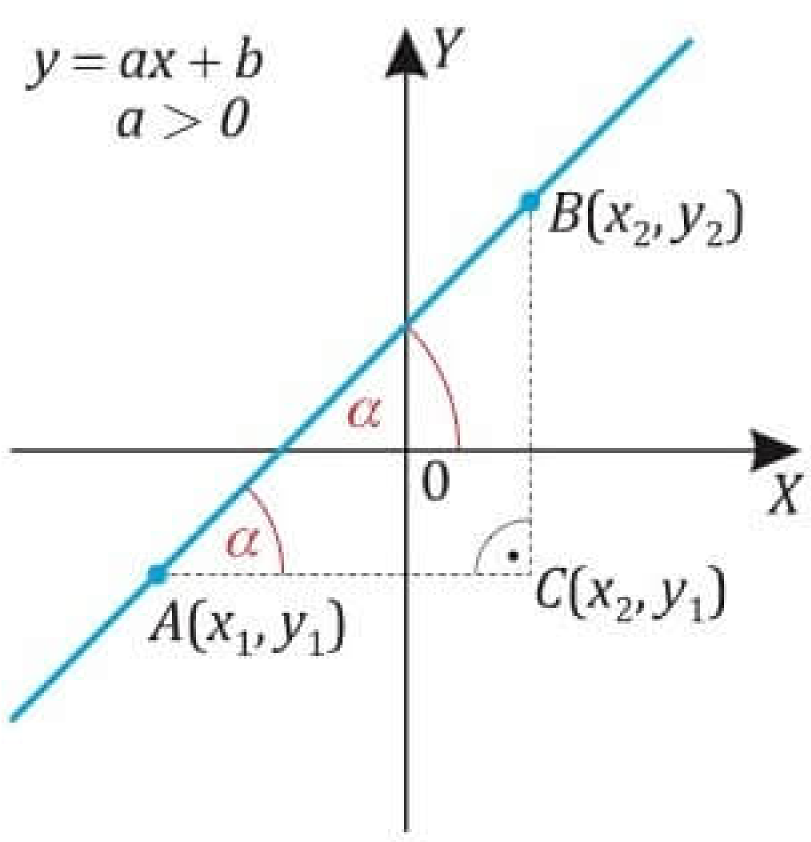
Prosta będąca wykresem funkcji nachylona jest do osi OX pod kątem α takim, że

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd

$\alpha = 30°$

Zastanowimy się teraz, jak obliczyć wartość współczynnika kierunkowego na podstawie współrzędnych dwóch dowolnych punktów należących do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, bez wyznaczania wzoru tej funkcji.

Niech dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Zauważ, że $x_1 \neq x_2$ (jeśli $x_1 = x_2$, to punkty A i B leżą na prostej prostopadłej do osi OX, która nie jest wykresem żadnej funkcji). Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych, do których należą punkty A i B (pierwszy wykres jest nachylony do osi OX pod kątem ostrym, drugi wykres jest nachylony do osi OX pod kątem rozwartym).

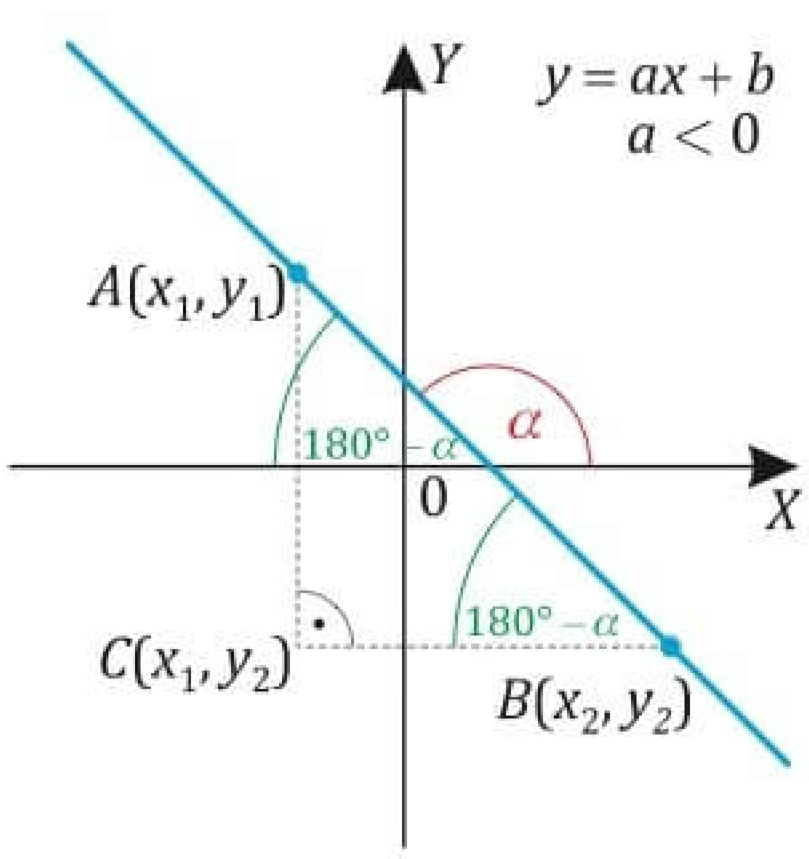


Rozpatrujemy trójkąt prostokątny ACB, gdzie $C(x_2, y_1)$. Kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX jest równy α, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$.

Ponieważ $AC \parallel OX$, więc $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.

Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Rozpatrujemy trójkąt prostokątny ABC, gdzie $C(x_1, y_2)$. Kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX jest równy α, gdzie $\alpha \in (90°, 180°)$. Zatem

$|\sphericalangle CBA| = 180° - \alpha$, gdzie $\sphericalangle CBA$ jest kątem ostrym.

Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right), \text{ ale}$$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, zatem

$-\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, skąd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Tak więc tg $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ i tg $\alpha = a$ (na mocy twierdzenia 2.), a stąd

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jeśli $y_2 = y_1$, to znaczy, że funkcja liniowa jest stała (współczynnik kierunkowy a jest równy zeru). Mamy również: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$, więc i w tym przypadku $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Zauważmy też, że

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

zatem nie jest istotne uporządkowanie punktów A, B na prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Jeśli dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, to

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Przykład 4.

Napiszemy wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty $A(-4; -3{,}3)$ oraz $B(-7; 5{,}7)$.

Szukany wzór ma postać

$y = ax + b$

Najpierw wyznaczamy współczynnik kierunkowy a (korzystamy z twierdzenia 3.).

$$a = \frac{5{,}7 - (-3{,}3)}{-7 - (-4)} = \frac{9}{-3} = -3$$

Zatem szukany wzór przyjmuje postać

$y = -3x + b$

Wiemy, że punkt $A(-4; -3{,}3)$ należy do wykresu, więc jego współrzędne spełniają wzór funkcji. Otrzymujemy równanie z niewiadomą b:

$-3{,}3 = -3 \cdot (-4) + b$

Rozwiązujemy równanie

$-3{,}3 = 12 + b$

$b = -15{,}3$

Aby wyznaczyć wyraz wolny b, mogliśmy też wykorzystać współrzędne punktu $B(-7; 5{,}7)$. Wykonaj odpowiednie obliczenia i sprawdź, czy otrzymasz taki sam wynik.

Szukany wzór funkcji jest następujący: $y = -3x - 15{,}3$.

Przykład 5.

Punkty $A(-58, 60)$ i $B(35, -21)$ należą do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Korzystając z tablic matematycznych, podamy kąt α nachylenia wykresu funkcji f do osi OX.

Obliczymy najpierw wartość współczynnika kierunkowego a:

$$a = \frac{-21-60}{35-(-58)} = \frac{-81}{93} \approx -0{,}871$$

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha \approx -0{,}871$. Zatem kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX jest rozwarty. Szukamy w tablicach takiego kąta ostrego α_1, dla którego

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \approx 0{,}871$$

Odczytujemy:

$$\alpha_1 \approx 41^\circ$$

Zatem

$$\alpha = 180^\circ - \alpha_1,$$

skąd

$$\alpha \approx 139^\circ$$

Wykres funkcji f nachylony jest do osi OX pod kątem ok. 139°.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podaj kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, jeśli:
   a) $y = x + 5$ b) $y = -\sqrt{3}x$ c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$

2. Korzystając z tablic matematycznych, podaj przybliżoną miarę kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX, jeśli:
   a) $y = 0{,}9x - 2{,}7$ b) $y = 0{,}7x + 3$ c) $y = 1{,}8x + 7$
   d) $y = -14{,}3x + 2$ e) $y = -0{,}53x - 4{,}8$ f) $y = -4x + 1{,}07$

3. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeśli:
   a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; $A(0, 5)$ b) $\alpha = 120^\circ$; $A(0, -1)$ c) $\alpha = 60^\circ$; $A\left(2\sqrt{3}, 4\right)$

4. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeśli:
   a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$; $A(-4, -5)$ b) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $A(9, 2)$ c) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $A(3, -1)$

5. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-43, 128)$ i $B(45, 908)$. Wyznacz kąt nachylenia wykresu funkcji f do osi OX.