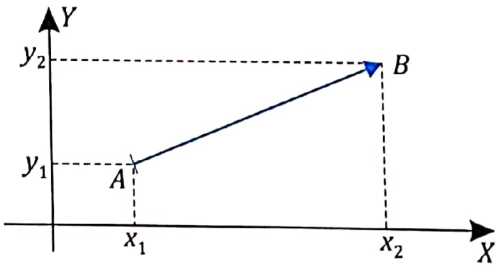
9. Przekształcenia wykresów funkcji

Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych

Pojęcie wektora na płaszczyźnie omówiliśmy w rozdziale 4. Teraz będziemy rozpatrywać wektor na płaszczyźnie z układem współrzędnych. Okazuje się, że każdemu wektorowi o ustalonym początku i końcu można przyporządkować tylko jedną parę liczb będącą jego współrzędnymi. Można również w danym układzie współrzędnych każdej parze liczb przyporządkować tylko jeden wektor swobodny, dla którego dane liczby – w rozpatrywanym układzie współrzędnych – stanowią jego współrzędne. Dlatego też możemy zastępować wektory (rozumiane jako uporządkowane pary punktów) uporządkowanymi parami liczb. W temacie tym wszystkie definicje dotyczące wektorów sformułujemy powtórnie, korzystając z odpowiedniości między parami punktów i parami liczb. Wektory na płaszczyźnie z układem współrzędnych są tymi samymi wektorami. Mówimy tylko o nich innym językiem. W wielu sytuacjach właśnie dzięki użyciu współrzędnych możemy z pożytkiem posłużyć się pojęciem wektora.

Definicja 1.
Niech w układzie współrzędnych dane będą punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.
Wektorem nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Taki wektor oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Liczby $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ nazywamy **współrzędnymi wektora**.

Obrazem graficznym wektora $\overrightarrow{AB}$ jest strzałka o początku w punkcie A i końcu w punkcie B.



Wektor, którego obie współrzędne są zerami, nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\vec{0}$. Przedstawieniem takiego wektora w układzie współrzędnych jest punkt.
Wektory będziemy też oznaczać jedną małą literą, ze strzałką u góry, np.: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{p}$.

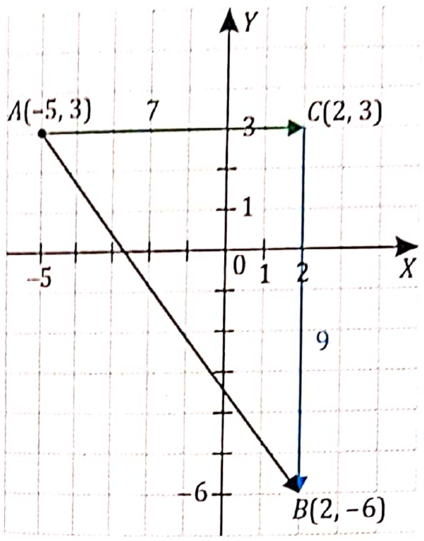
UWAGA: Zamiast pisać: „wektor $[a, b]$, który oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$" lub „wektor $[x, y]$, który oznaczamy symbolem $\vec{v}$", będziemy pisać krócej: „wektor $\overrightarrow{AB} = [a, b]$" lub „wektor $\vec{v} = [x, y]$".

Przykład 1.

W prostokątnym układzie współrzędnych dane są punkty $A(-5, 3)$ i $B(2, -6)$. Wyznaczymy wektor $\overrightarrow{AB}$, przedstawimy go w układzie współrzędnych i zastanowimy się, co oznaczają jego współrzędne.

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-5), -6 - 3] = [7, -9]$$

Oto rysunek i interpretacja współrzędnych wektora:



Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ możemy interpretować jako kolejne etapy „najkrótszej drogi", jaką musimy pokonać, poruszając się z A do B zgodnie z zasadą: najpierw wzdłuż osi OX, potem wzdłuż osi OY. Zauważ, że przesuwając się o 7 jednostek wzdłuż osi OX, zgodnie z jej zwrotem (w prawo), a następnie o 9 jednostek wzdłuż osi OY, przeciwnie do jej zwrotu (w dół), „dostaniemy się" z A do B. Przesunięcie zgodne ze zwrotem osi zapisujemy jako liczbę dodatnią, zaś przeciwne do zwrotu osi – jako liczbę ujemną. Mamy zatem:

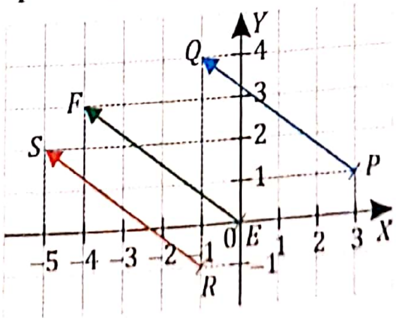
$$\overrightarrow{AB} = [7, -9]$$

Wektory $\overrightarrow{AC} = [7, 0]$ oraz $\overrightarrow{CB} = [0, -9]$ nazywamy **wektorami składowymi** wektora $\overrightarrow{AB}$.

> **Definicja 2.**
> **Wektory** $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ są **równe** wtedy, gdy $u_x = v_x$ i $u_y = v_y$. Równość wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zapisujemy $\vec{u} = \vec{v}$.

Przykład 2.

Przedstawimy w układzie współrzędnych wektor $\vec{u} = [-4, 3]$.



Możemy podać wiele rozwiązań tego zadania. Zauważ, że zarówno wektor $\overrightarrow{EF} = [-4, 3]$, gdzie $E(0, 0)$ i $F(-4, 3)$, jak i wektor $\overrightarrow{PQ} = [-4, 3]$, gdzie $P(3, 1)$ i $Q(-1, 4)$, czy też $\overrightarrow{RS} = [-4, 3]$, gdzie $R(-1, -1)$ i $S(-5, 2)$. Takich wektorów jest nieskończenie wiele.

Tworzą one rodzinę wektorów równych, którą nazywamy **wektorem swobodnym**. Aby przedstawić w układzie współrzędnych wektor $\vec{u} = [-4, 3]$, wystarczy wskazać dowolnie wybranego reprezentanta tej rodziny.

Przykład 3.

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{u} = [-3, 4]$. Znajdziemy współrzędne punktu A, dla którego $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Oznaczmy współrzędne szukanego punktu $A(x, y)$, następnie obliczmy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [1 - x, 5 - y]$$

Wiemy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{u}$ są równe, więc odpowiednie współrzędne mają identyczne,

$$[1 - x, 5 - y] = [-3, 4],$$

czyli

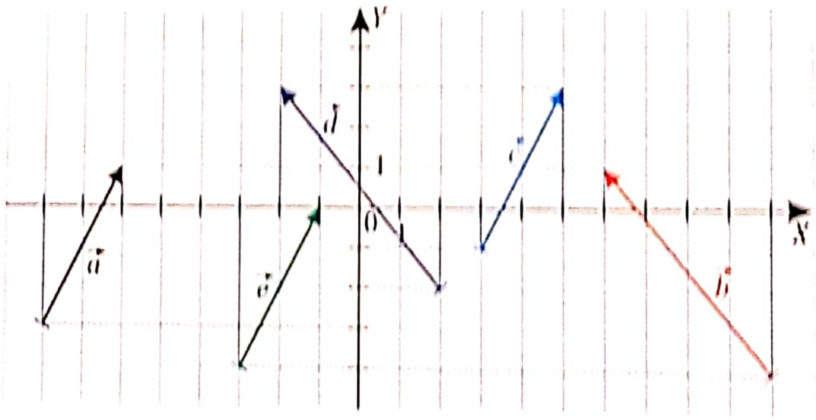
$$1 - x = -3 \ \wedge \ 5 - y = 4, \quad \text{skąd}$$

$$x = 4 \ \wedge \ y = 1$$

Otrzymaliśmy więc, że $A(4, 1)$.

Przykład 4.

Na poniższym rysunku przedstawione są wektory. Odczytamy z rysunku ich współrzędne. Wskażemy wektory równe.



$\vec{a} = [2, 4]$ $\quad$ $\vec{b} = [-4, 5]$ $\quad$ $\vec{c} = [2, 4]$ $\quad$ $\vec{d} = [-4, 5]$ $\quad$ $\vec{e} = [2, 4]$

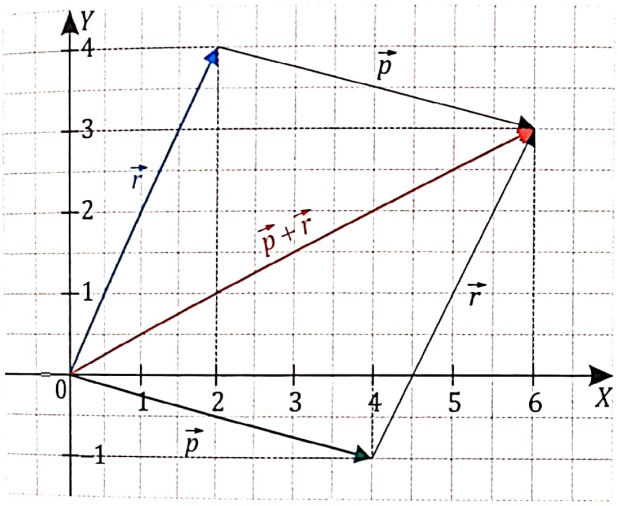
Wektory równe to wektory $\vec{a}$, $\vec{c}$ i $\vec{e}$ oraz wektory $\vec{b}$ i $\vec{d}$.

> ### Definicja 3.
> **Sumą wektorów** $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy wektor $[u_x + v_x, u_y + v_y]$.
> Sumę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy $\vec{u} + \vec{v}$.

Wracając do przykładu 1., możemy powiedzieć, że wektor $\overrightarrow{AB}$ jest sumą swoich wektorów składowych.

Przykład 5.

Wyznaczymy sumę wektorów $\vec{p} = [4, -1]$ i $\vec{r} = [2, 4]$ i przedstawimy jej graficzną interpretację.



$$\vec{p}+\vec{r} = [4 + 2, -1 + 4] = [6, 3]$$

> **Definicja 4.**
> **Wektory** $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są **przeciwne** wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym.

Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$. Wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczamy $-\overrightarrow{AB}$ lub $\overrightarrow{BA}$. Łatwo zauważyć, że jeśli

$\vec{u} = [u_x, u_y]$, to $-\vec{u} = [-u_x, -u_y]$.

Przykład 6.

Wyznaczymy wartości parametrów m oraz n, dla których wektory $\vec{u} = [m + 2, n - 3]$ oraz $\vec{v} = [2m + 1, 4n - 2]$ są przeciwne.

Suma wektorów przeciwnych jest wektorem zerowym, zatem:

$(m + 2) + (2m + 1) = 0 \quad \wedge \quad (n - 3) + (4n - 2) = 0$

Rozwiązujemy otrzymane równania:

$(m + 2) + (2m + 1) = 0 \quad \wedge \quad (n - 3) + (4n - 2) = 0$

$3m + 3 = 0 \quad \wedge \quad 5n - 5 = 0$

$m = -1 \quad \wedge \quad n = 1$

Jeśli $m = -1$ oraz $n = 1$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne.

Sprawdźmy otrzymane obliczenia.

Dla obliczonych wartości m i n otrzymujemy:

$\vec{u} = [-1 + 2, 1 - 3] = [1, -2] \qquad \vec{v} = [2 \cdot (-1) + 1, 4 \cdot 1 - 2] = [-1, 2]$,

czyli wektory są przeciwne.

Definicja 5.

Różnicą wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy wektor $[u_x - v_x, u_y - v_y]$.
Różnicę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy $\vec{u} - \vec{v}$.

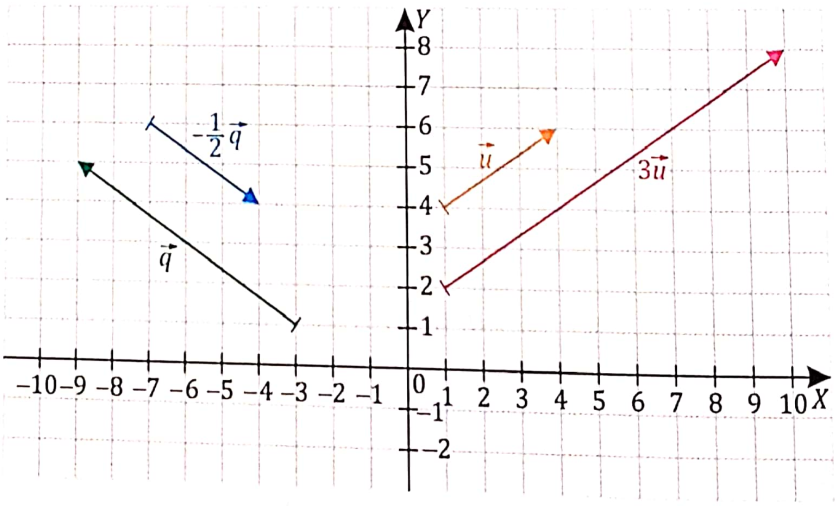
Definicja 6.

Iloczynem wektora $\vec{u} = [u_x, u_y]$ **przez liczbę rzeczywistą** a nazywamy wektor $[a \cdot u_x, a \cdot u_y]$. Iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę a oznaczamy $a \cdot \vec{u}$.

Przykład 7.

Jeśli $\vec{p} = [2, -1]$ i $a = (-3)$, to $a \cdot \vec{p} = [(-3) \cdot 2, (-3) \cdot (-1)] = [-6, 3]$.

Jeśli dla wektorów niezerowych $\vec{u}$ i $\vec{v}$ istnieje liczba rzeczywista a, dla której $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazwiemy **wektorami równoległymi**. Jeśli dodatkowo $a > 0$, to powiemy, że **wektory** $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **mają ten sam zwrot**; jeśli natomiast $a < 0$, to powiemy, że **wektory** $\vec{u}$ **i** $\vec{v}$ **mają przeciwne zwroty**.



Definicja 7.

Długością wektora $= [u_x, u_y]$ nazywamy liczbę $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Długość wektora $\vec{u}$ oznaczamy $|\vec{u}|$.

Przykład 8.

Obliczymy długość wektora $\vec{u} = [12, 5]$.

Otrzymujemy:

$$|\vec{u}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Długość wektora $\vec{u}$ wynosi 13.

Jeśli $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to długość wektora $\overrightarrow{AB}$ przedstawiamy wzorem:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Łatwo uzasadnić (powołując się na tw. Pitagorasa), że długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa długości odcinka o końcach A i B.

Na koniec tego tematu podamy trzy twierdzenia charakteryzujące wektory równe, wektory przeciwne oraz działania na wektorach. Spróbuj udowodnić te twierdzenia, wykorzystując wcześniej poznane wiadomości.

Twierdzenie 1.
Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równe, to wektory te:
- są równoległe
- mają te same zwroty
- mają taką samą długość.

Twierdzenie 2.
Jeśli wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne, to wektory te:
- są równoległe
- mają przeciwne zwroty
- mają taką samą długość.

Twierdzenie 3.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych k, l:

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$

3) $k \cdot \left(l \cdot \vec{u}\right) = (k \cdot l) \cdot \vec{u}$

4) $(k + l) \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{u}$

5) $k \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, mając dane punkty $A(-4, 3)$, $B(-1, 7)$.
2. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj wektory:
   $\vec{u} = [0, 3]$, $\vec{v} = [2, 0]$, $\vec{p} = [-4, 5]$
   Początek wektora obierz dowolnie.
3. Oblicz długość wektora:
   a) $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A(-3, 1)$, $B(-5, -6)$
   b) $\vec{u}$, jeśli $\vec{u} = [-5, 12]$
4. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [7, -8]$ oraz punkt $A(-2, 5)$. Oblicz współrzędne punktu B.