Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera

Równoległość wykresów

Wiesz, że wykresy funkcji liniowych są równoległe tylko wtedy, gdy są nachylone do osi *OX* pod tym samym kątem. Zatem prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

Przykład 1.

Dana jest funkcja liniowa $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Napiszemy wzór funkcji, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt $A(-6, 7)$.

Szukany wzór funkcji ma postać $y = ax + b$. Najpierw wyznaczamy równanie dowolnej prostej, równoległej do wykresu danej funkcji. To równanie ma postać:

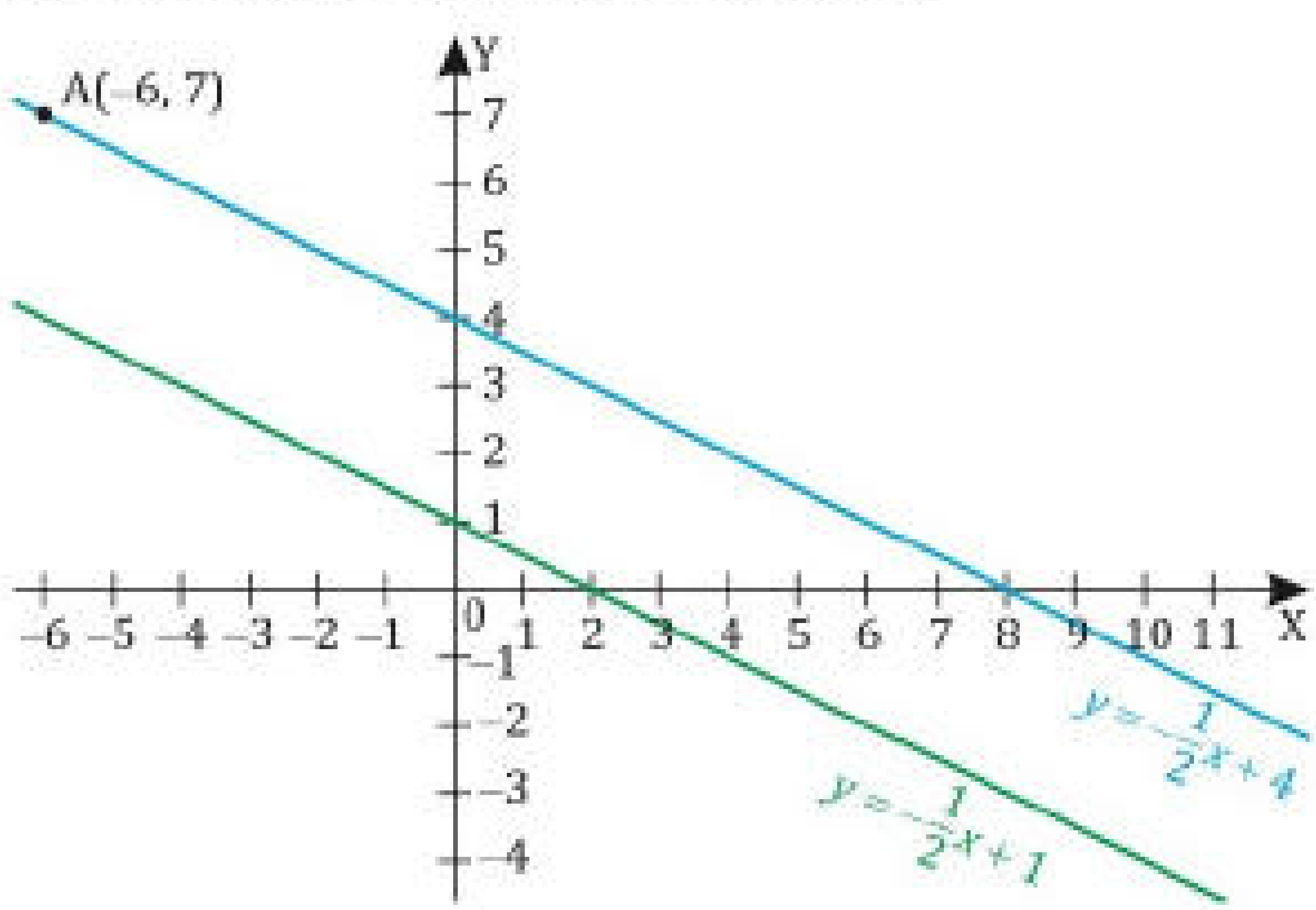
$y = -\frac{1}{2}x + b$ (współczynniki kierunkowe są równe).

Następnie korzystamy z faktu, że punkt $A(-6, 7)$ należy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + b$, zatem

$7 = -\frac{1}{2} \cdot (-6) + b$, skąd $7 = 3 + b$, więc $b = 4$.

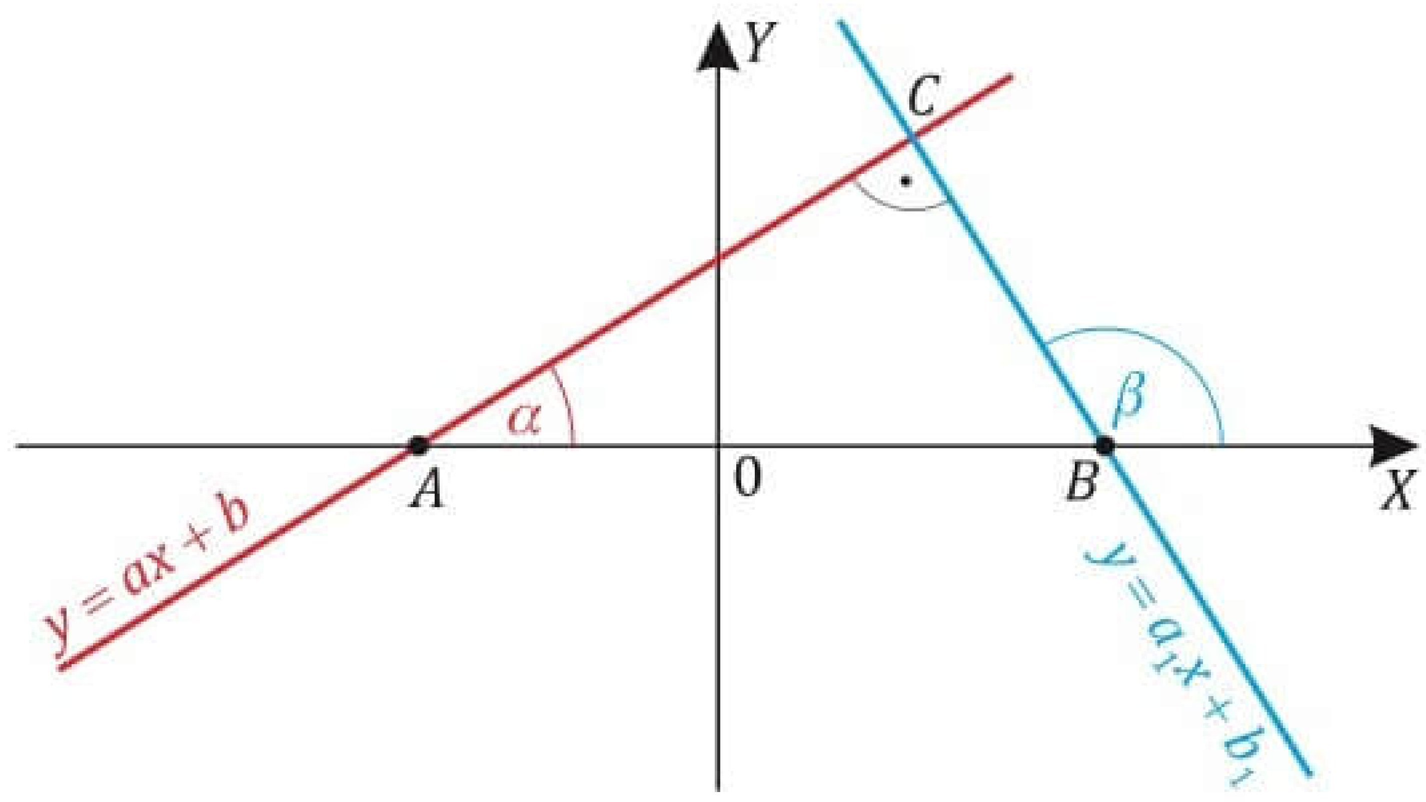
Szukany wzór funkcji to $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Sprawdźmy nasze obliczenia i naszkicujmy wykresy funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 1$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + 4$ we wspólnym układzie współrzędnych.



Prostopadłość wykresów funkcji

Naszkicujmy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$ i $a \neq a_1$. Wyprowadzimy warunek na prostopadłość tych wykresów.



Wykres funkcji

$y = ax + b$

przecina oś OX w punkcie A i jest nachylony do osi OX pod takim kątem (ostrym) α, że

$\operatorname{tg} \alpha = a$

Wykres funkcji

$y = a_1x + b_1$

przecina oś OX w punkcie B i jest nachylony do osi OX pod takim kątem (rozwartym) β, że

$\operatorname{tg} \beta = a_1$

Proste nie są równoległe do osi OX, bo z założenia $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$. Te proste są wykresami funkcji, więc nie są prostopadłe do osi OX. Punkt przecięcia się wykresów tych funkcji oznaczamy przez C.
Następnie rozważamy trójkąt ABC, w którym

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = 180° - \beta$ (z własności kątów przyległych).

Wobec tego $\sphericalangle ACB$ będzie kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 90°$

Zatem wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$\alpha + (180° - \beta) = 90°$,

czyli

$\beta = 90° + \alpha$

Równość $\beta = 90° + \alpha$ jest równoważna równości

$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90° + \alpha)$,

bo tangens dla dowolnych różnych argumentów ze zbioru $(90°, 180°)$ przyjmuje różne wartości.

Ponadto prawdziwe są równości (poznałeś je w klasie pierwszej):

1. $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
2. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, o ile $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, jeśli $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, więc

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \underset{(1)}{=} -\operatorname{ctg}\alpha \underset{(2)}{=} -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Otrzymaliśmy zależność:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ czyli}$$

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha = -1, \text{ skąd}$$

$$a_1 \cdot a = -1$$

Udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a \cdot a_1 = -1$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji liniowej $y = \frac{2}{3}x + 5$ i przechodzi przez punkt $A(4, 1)$.

Szukany wzór funkcji ma postać $y = ax + b$.
Najpierw wyznaczamy równanie dowolnej prostej, prostopadłej do wykresu danej funkcji. To równanie ma postać:

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

$\left(\text{bo współczynniki kierunkowe spełniają warunek } \frac{2}{3} \cdot a = -1, \text{skąd } a = -\frac{3}{2}\right)$.

Następnie korzystamy z faktu, że punkt $A(4, 1)$ należy do wykresu funkcji $y = -\frac{3}{2}x + b$, zatem

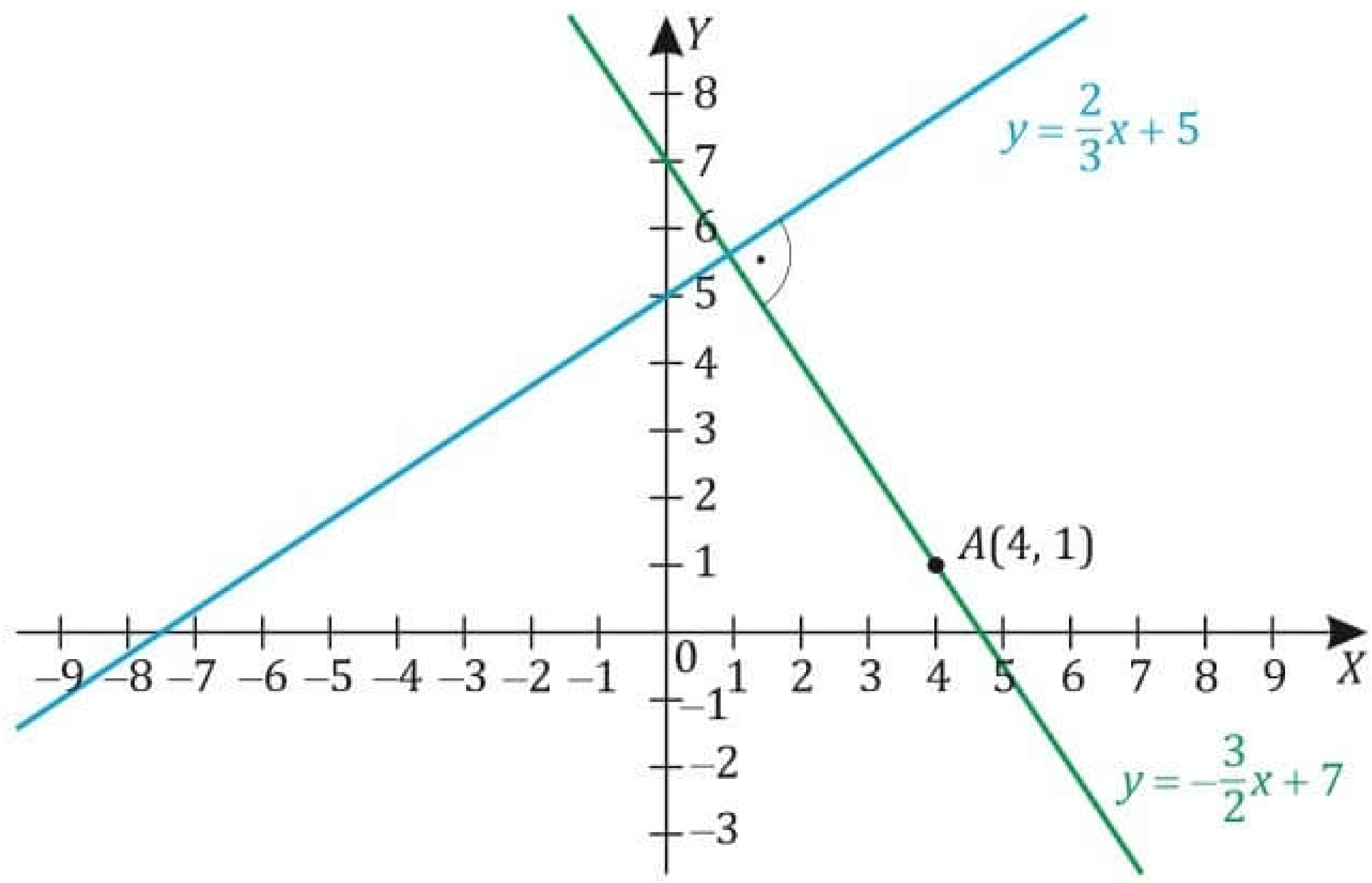
$$1 = -\frac{3}{2} \cdot 4 + b, \text{ skąd}$$

$$1 = -6 + b, \text{ więc}$$

$$b = 7$$

Wzór szukanej funkcji: $y = -\frac{3}{2}x + 7$.

Sprawdźmy nasze obliczenia i naszkicujmy wykresy funkcji $y = \frac{2}{3}x + 5$ oraz $y = -\frac{3}{2}x + 7$ we wspólnym układzie współrzędnych.



Przykład 3.

Wyznaczymy wartość parametru m, dla którego wykresy funkcji liniowych

$$f(x) = 4 - (m+3)x \quad \text{i} \quad g(x) = 8x + 5$$

są:

a) prostymi równoległymi b) prostymi prostopadłymi.

Ad a)

Ad a) Wykresy funkcji liniowych są równoległe wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są jednakowe. Współczynnik kierunkowy funkcji f jest równy $-(m+3)$, a funkcji g jest równy 8. Stąd:

$-(m+3) = 8$, czyli $-m-3=8$

$m = -11$

Wykresy funkcji f i g są równoległe wtedy, gdy $m = -11$.

Ad b)

Ad b) Wykresy funkcji f i g są prostopadłe wtedy, gdy iloczyn współczynników kierunkowych jest równy -1, czyli

$-(m+3)\cdot 8 = -1$, zatem $m+3 = \frac{1}{8}$

$m = -2\frac{7}{8}$

Wykresy funkcji f i g są prostopadłe wtedy, gdy $m = -2\frac{7}{8}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji liniowej $y = 4x - 5$ i przechodzi przez punkt $A(-8, 9)$.
2. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji liniowej $y = x + 7$ i przechodzi przez punkt $A(4, -2)$.
3. Wyznacz wartość parametru m, dla której wykresy funkcji liniowych $f(x) = (m-1)x + 5$ i $g(x) = 2 - 3x$ są:

   a) prostymi równoległymi b) prostymi prostopadłymi.