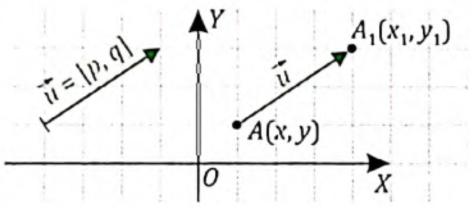
Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u} = [p, q]$

W rozdziale 4. poznałeś przekształcenia geometryczne. Teraz omówimy je w prostokątnym układzie współrzędnych. Następnie nauczymy się przekształcać wykresy funkcji.

Wiesz, że przesunięcie równoległe (translacja) o dany wektor $\vec{u}$ to przekształcenie płaszczyzny przyporządkowujące każdemu punktowi A tej płaszczyzny taki punkt A_1, dla którego $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$.

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczymy dowolny punkt $A(x, y)$ oraz wektor $\vec{u} = [p, q]$. Niech $A_1(x_1, y_1)$ będzie obrazem punktu A w translacji o wektor $\vec{u}$.

Zbadamy, jaka jest zależność między współrzędnymi wektora $\vec{u}$ i współrzędnymi punktów A i A_1.



Wiemy, że $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$, czyli

$$[x_1 - x, y_1 - y] = [p, q]$$

Zatem, na podstawie definicji równości wektorów, otrzymujemy:

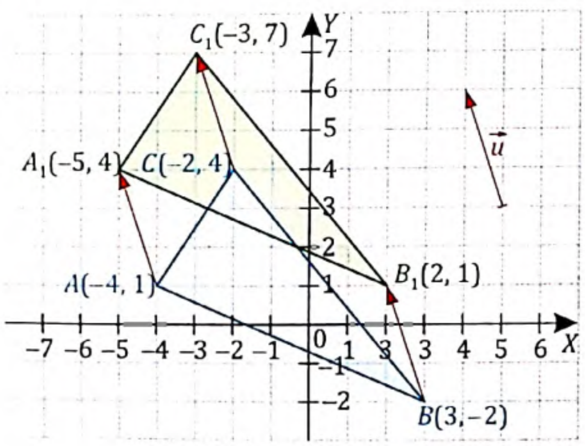
$$x_1 - x = p \ \wedge \ y_1 - y = q, \text{ skąd}$$

$$x_1 = x + p \ \wedge \ y_1 = y + q$$

> ***Twierdzenie 1.***
> W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $A(x, y)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [p, q]$ jest punkt $A_1(x + p, y + q)$.

Przykład 1.

Wyznaczymy współrzędne wierzchołków trójkąta ABC, gdzie $A(-4, 1)$, $B(3, -2)$, $C(-2, 4)$, w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-1, 3]$.

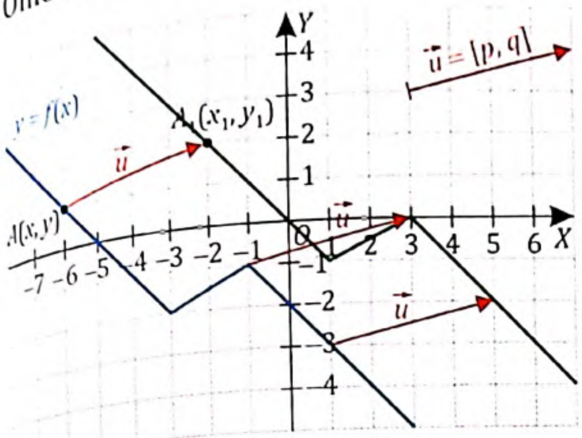


$T_{\vec{u}}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$,

gdzie

$A_1(-5, 4)$, bo $(-4 + (-1), 1 + 3) = (-5, 4)$
$B_1(2, 1)$, bo $(3 + (-1), -2 + 3) = (2, 1)$
$C_1(-3, 7)$, bo $(-2 + (-1), 4 + 3) = (-3, 7)$

Omówimy teraz przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$.



Niech punkt

$A(x, y)$

będzie dowolnym punktem wykresu funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek obok). Dokonamy przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor

$\vec{u} = [p, q]$

Obrazem punktu A w tym przesunięciu jest punkt

$A_1(x_1, y_1)$

Wiemy, że między współrzędnymi punktu A, A_1 i wektora $\vec{u}$ zachodzą następujące związki:

$x_1 = x + p$ i $y_1 = y + q$, zatem

$x = x_1 - p$ i $y = y_1 - q$

Wyznaczone wielkości x, y podstawiamy do wzoru funkcji $y = f(x)$. Mamy:

$y_1 - q = f(x_1 - p)$, skąd

$y_1 = f(x_1 - p) + q$

Otrzymaliśmy wzór funkcji, której wykres składa się z punktów będących obrazami punktów wykresu funkcji $y = f(x)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [p, q]$. Zatem wykres otrzymanej funkcji możemy zapisać w postaci: $y = f(x - p) + q$ (aby oba wykresy mogły być narysowane w tym samym układzie współrzędnych).

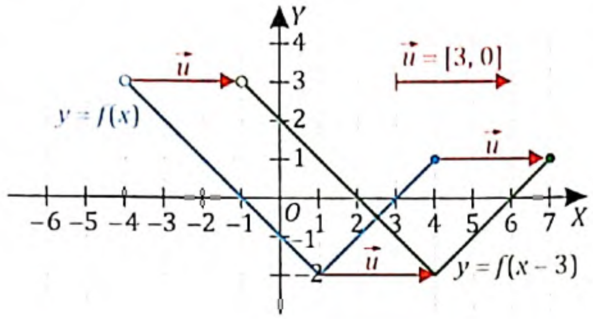
Twierdzenie 2.
Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$.

Zauważ, że:
- Wykres funkcji $y = f(x - p)$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, 0]$ (translacja wzdłuż osi OX).
- Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [0, q]$ (translacja wzdłuż osi OY).

Przykład 1.

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykres funkcji $y = f(x)$ oraz:
a) $y = f(x - 3)$ i $y = f(x + 2)$ b) $y = f(x) + 1$ i $y = f(x) - 4$ c) $y = f(x + 5) + 2$

Ad a)

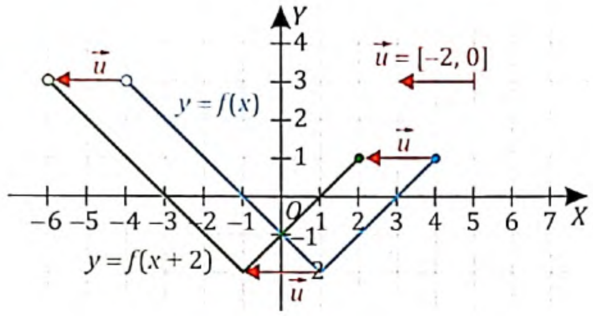


Zauważmy, że $p = 3$ $(p > 0)$, $q = 0$.
Wykres funkcji

$y = f(x - 3)$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi OX, czyli o wektor

$\vec{u} = [3, 0]$



Zauważmy, że $p = -2$ $(p < 0)$, $q = 0$.
Wykres funkcji

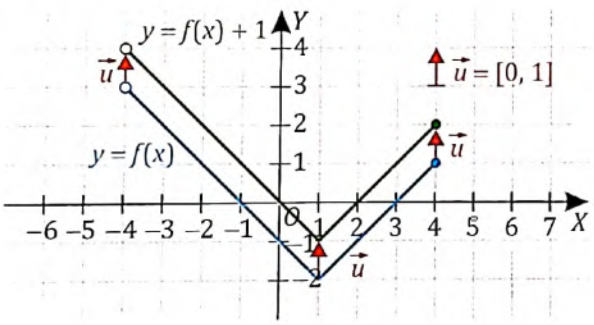
$y = f(x + 2)$

$y = f(x - (-2))$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi OX, czyli o wektor

$\vec{u} = [-2, 0]$

Ad b)

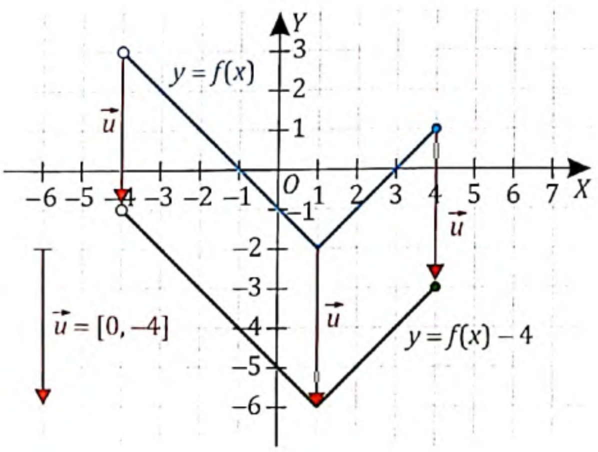


Zauważmy, że $p = 0$, $q = 1$ $(q > 0)$.
Wykres funkcji

$y = f(x) + 1$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o 1 jednostkę do góry wzdłuż osi OY, czyli o wektor

$\vec{u} = [0, 1]$



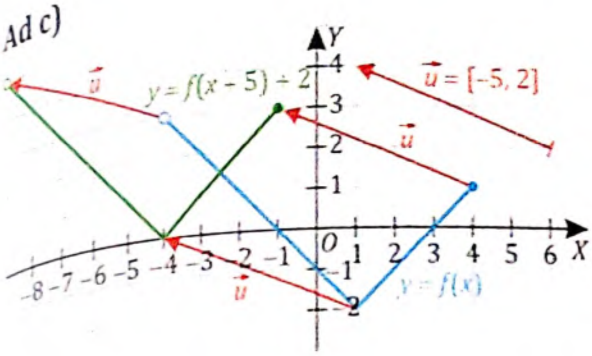
Zauważmy, że $p = 0$, $q = -4$ $(q < 0)$.
Wykres funkcji

$y = f(x) - 4$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o 4 jednostki do dołu wzdłuż osi OY, czyli o wektor

$\vec{u} = [0, -4]$

Ad c)



Zauważmy, że $p = -5$ $(p < 0)$, $q = 2$ $(q > 0)$. Wykres funkcji

$$y = f(x + 5) + 2$$

powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o 5 jednostek w lewo, a następnie o 2 jednostki do góry, czyli o wektor

$$\vec{u} = [-5, 2]$$

Przykład 2.

Poniżej podane są wzory trzech funkcji, których wykresy przesunięto równolegle o podany obok wektor $\vec{u}$. Ustalimy wzór funkcji, której wykres otrzymamy w każdej z podanych translacji, jeśli:

a) $f(x) = 2x - 4$, $\vec{u} = [-3, 0]$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\vec{u} = [0, 5]$ c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $\vec{u} = [2, -6]$.

Ad a) Ponieważ $\vec{u} = [-3, 0]$, więc $p = -3$ i $q = 0$, zatem wyznaczymy $f(x - p)$, czyli $f(x + 3)$.
Obliczamy:

$$f(x + 3) = 2 \cdot (x + 3) - 4 = 2x + 6 - 4 = 2x + 2$$

W wyniku translacji wykresu funkcji $f(x) = 2x - 4$ o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$ otrzymaliśmy wykres funkcji $y = 2x + 2$.

Ad b) W tym przypadku $\vec{u} = [0, 5]$, więc $p = 0$ i $q = 5$, zatem należy znaleźć $f(x) + q$, czyli $f(x) + 5$.
Otrzymujemy:

$$f(x) + 5 = \frac{1}{2}x^2 + 5$$

W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ o wektor $\vec{u} = [0, 5]$ otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$.

Ad c) Tym razem $\vec{u} = [2, -6]$, więc $p = 2$ i $q = -6$. Obliczamy $f(x - p) + q$, czyli $f(x - 2) - 6$.
Otrzymujemy:

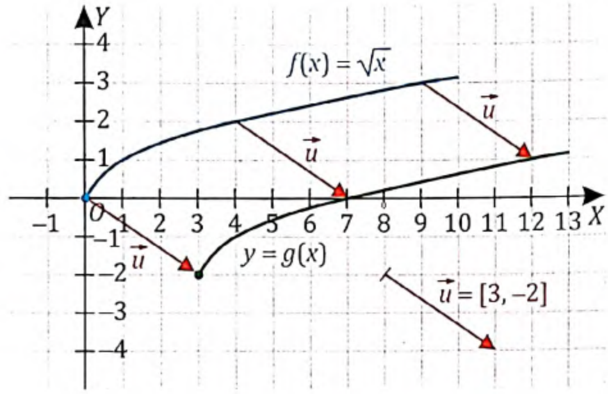
$$f(x - 2) - 6 = \frac{3}{x - 2} - 6$$

W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ o wektor $\vec{u} = [2, -6]$ otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \frac{3}{x - 2} - 6$.

Przykład 3.

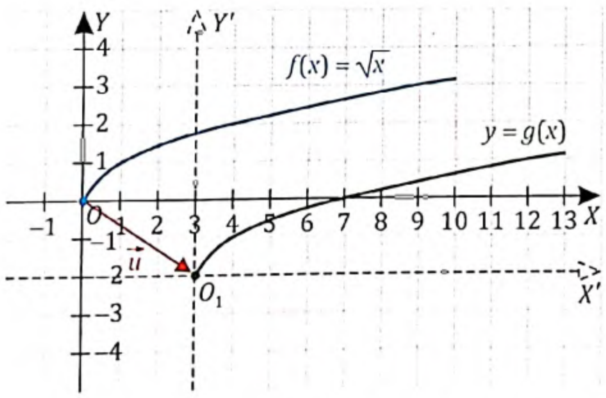
Naszkicujemy wykres funkcji, który otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor $\vec{u} = [3, -2]$. Napiszemy wzór funkcji g, której wykres jest obrazem wykresu funkcji f w tym przekształceniu.

Wykres funkcji g naszkicujemy na dwa sposoby:



I sposób

W prostokątnym układzie współrzędnych szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ oraz rysujemy wektor $\vec{u} = [3, -2]$, zaczepiając go w dowolnym punkcie płaszczyzny. Wybieramy kilka punktów wykresu funkcji f i znajdujemy ich obrazy w translacji o wektor $\vec{u}$. Ponieważ przesunięcie równoległe jest izometrią, więc otrzymany wykres ma taki sam kształt jak wykres funkcji f. Sytuację tę ilustruje rysunek obok.



II sposób

Rysujemy pomocniczy układ współrzędnych $X_1O_1Y_1$, gdzie punkt O_1 jest obrazem punktu $O(0, 0)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [3, -2]$, czyli $O_1(3, -2)$. W „nowym" układzie współrzędnych szkicujemy wykres funkcji $y_1 = \sqrt{x_1}$ – jest to wykres funkcji g.

Pozostało nam ustalić wzór funkcji g.

W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$$y = f(x) \text{ o wektor } \vec{u} = [3, -2]$$

otrzymujemy wykres funkcji:

$$y = f(x-3) - 2$$

Ponieważ $f(x) = \sqrt{x}$, więc

$$g(x) = f(x-3) - 2 = \sqrt{x-3} - 2$$

Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o wektor $\vec{u} = [3, -2]$ otrzymaliśmy wykres funkcji $g(x) = \sqrt{x-3} - 2$.

Przykład 4.

Naszkicujemy wykres funkcji $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

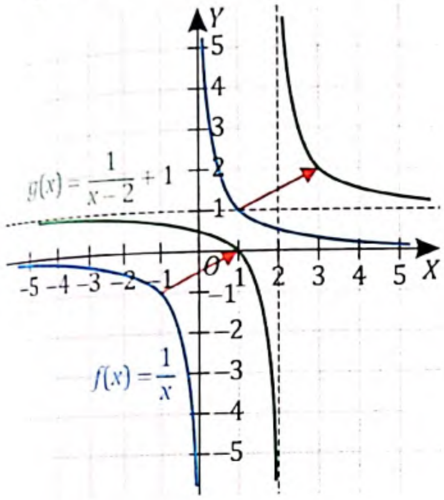
Najpierw przekształcimy wzór funkcji $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ w następujący sposób:

$$g(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

Zatem do naszkicowania wykresu funkcji g możemy wykorzystać wykres funkcji

$f(x) = \frac{1}{x}$, bo

$g(x) = f(x-2) + 1$

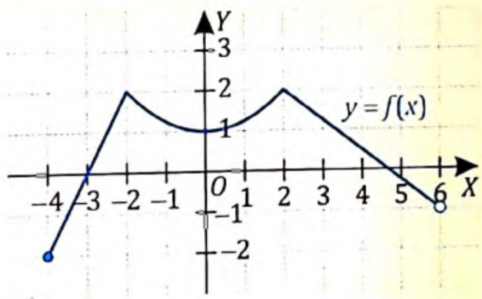


Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $\vec{u} = [2, 1]$.

Wykres funkcji $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ przedstawiony jest na rysunku obok.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Na osobnych rysunkach naszkicuj wykresy funkcji:
$f_1(x) = f(x+3)$, $f_2(x) = f(x-2)$, $f_3(x) = f(x) + 1$, $f_4(x) = f(x) - 4$, $f_5(x) = f(x-4) - 1$.
Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, których wykresy otrzymałeś.



2. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji:

a) $f(x) = 2x^2$ o wektor $\vec{u} = [-2, 3]$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $\vec{v} = [4, -1]$.

Naszkicuj wykres obrazu funkcji f w tym przekształceniu.

3. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, wiedząc, że w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ o wektor $\vec{u}$ otrzymano wykres funkcji:

a) $g(x) = \operatorname{sgn}(x-3)$ b) $h(x) = \operatorname{sgn} x + 5$ c) $t(x) = \operatorname{sgn}(x+1) - 4$.