Symetria osiowa względem osi *OX* i osi *OY*

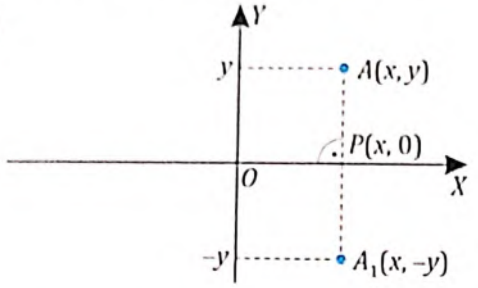
W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono punkt $A(x, y)$ i obraz A_1 punktu A w symetrii osiowej:

a) względem osi OX

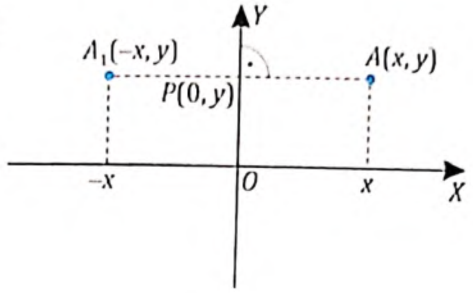
b) względem osi OY.

Sytuację tę przedstawiają poniższe rysunki.

a)



b)



Łatwo udowodnić następujące twierdzenie.

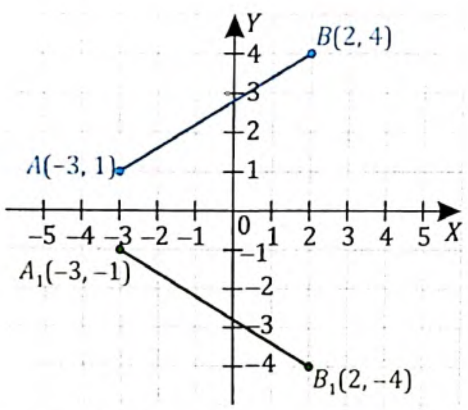
Twierdzenie 1.

a) Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A_1(x, -y)$.

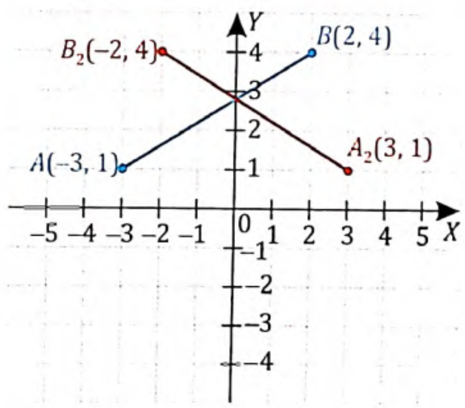
b) Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A_1(-x, y)$.

Przykład 1.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysujemy odcinek AB, gdzie $A(-3, 1)$, $B(2, 4)$, a następnie wyznaczymy obraz tego odcinka, czyli odcinek A_1B_1, w symetrii osiowej względem osi OX oraz obraz tego odcinka, czyli odcinek A_2B_2, w symetrii osiowej względem osi OY.



$S_{OX}(AB) = A_1B_1$,
gdzie $A_1(-3, -1)$ i $B_1(2, -4)$

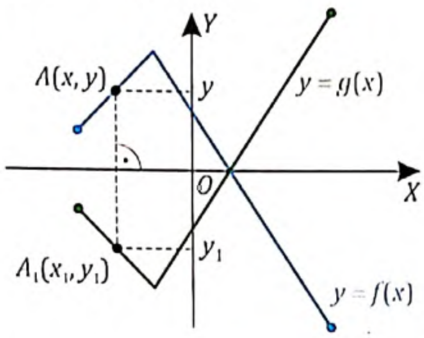


$S_{OY}(AB) = A_2B_2$,
gdzie $A_2(3, 1)$ i $B_2(-2, 4)$

Zajmiemy się teraz przekształceniem wykresu funkcji w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych.

Symetria względem osi OX

W prostokątnym układzie współrzędnych narysowany jest wykres funkcji $y=f(x)$. Wykres ten przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OX. Ustalimy wzór funkcji g, której wykres otrzymaliśmy.



Na wykresie funkcji f wybieramy dowolny punkt $A(x, y)$. Obrazem punktu A w symetrii względem osi OX jest punkt $A_1(x_1, y_1)$. Między współrzędnymi punktów A i A_1 zachodzą następujące zależności:

$x_1 = x$ i $y_1 = -y$, stąd

$x = x_1$ i $y = -y_1$

Po podstawieniu wyznaczonych wielkości w miejsce x i y do wzoru funkcji $y=f(x)$ otrzymujemy:

$-y_1 = f(x_1)$, skąd

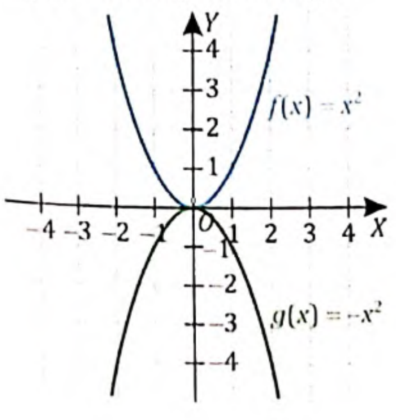
$y_1 = -f(x_1)$

Otrzymaliśmy wzór funkcji, której wykres składa się z punktów będących obrazami punktów wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii osiowej względem osi OX. Zatem wykres otrzymanej funkcji możemy zapisać w postaci $y = -f(x)$ (aby oba wykresy mogły być narysowane w tym samym układzie współrzędnych), mamy więc $g(x) = -f(x)$.

> ***Twierdzenie 2.***
> Wykres funkcji $y=-f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y=f(x)$ przez symetrię osiową względem osi OX.

Przykład 2.

Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = x^2$. Naszkicujemy obraz wykresu tej funkcji w symetrii osiowej względem osi OX, a następnie napiszemy wzór funkcji g, której wykres otrzymaliśmy.



W wyniku przekształcenia wykresu funkcji

$y=f(x)$

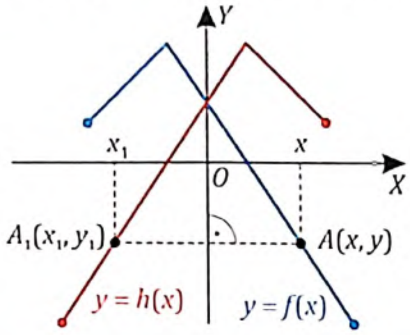
przez symetrię osiową względem osi OX otrzymujemy wykres funkcji

$y=-f(x)$, zatem

$g(x) = -x^2$

Symetria względem osi *OY*

Tym razem wykres funkcji przekształcimy przez symetrię osiową względem osi *OY* i ustalimy wzór funkcji *h*, której wykres otrzymamy (rysunek poniżej).



Obrazem punktu $A(x, y)$ dowolnie wybranego na wykresie funkcji *f* jest punkt $A_1(x_1, y_1)$ taki, że

$x_1 = -x$ i $y_1 = y$, więc

$x = -x_1$ i $y = y_1$.

Do wzoru $y = f(x)$ wstawiamy w miejsce *x* oraz *y* wyznaczone wielkości i otrzymujemy wzór funkcji $y = h(x)$, której wykres tworzą obrazy punktów wykresu funkcji *f* w symetrii względem osi *OY*. Mamy:

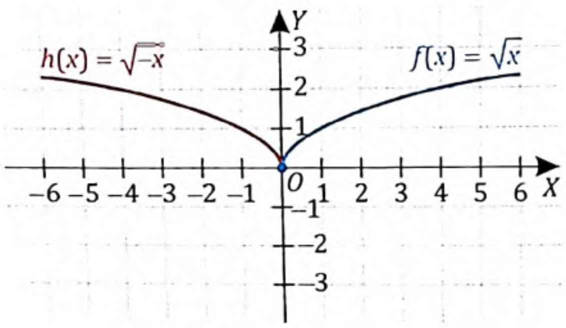
$y_1 = f(-x_1)$

Zatem wykres otrzymanej funkcji możemy zapisać w postaci: $y = f(-x)$ (aby oba wykresy mogły być narysowane w tym samym układzie współrzędnych), mamy więc: $h(x) = f(-x)$.

Twierdzenie 3.
Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi *OY*.

Przykład 3.

Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, przekształcimy przez symetrię względem osi *OY* i ustalimy wzór funkcji *h*, której wykres otrzymamy.



W wyniku przekształcenia wykresu funkcji

$y = f(x)$

przez symetrię osiową względem osi *OY* otrzymujemy wykres funkcji

$y = f(-x)$, czyli

$h(x) = \sqrt{-x}$

Przykład 4.

Funkcja $y = f(x)$, gdzie $x \in R$, jest rosnąca. Wykażemy, że funkcja $y = g(x)$, gdzie $g(x) = f(-x)$, jest malejąca.

Założenie: $y = f(x)$ – funkcja rosnąca, $x_1 \in R$, $x_2 \in R$, $x_1 < x_2$, $g(x) = f(-x)$
Teza: $y = g(x)$ – funkcja malejąca

Dowód: Z założenia wiemy, że

$x_1 < x_2$, zatem

$-x_1 > -x_2$, więc

$f(-x_1) > f(-x_2)$, ponieważ funkcja f jest rosnąca, stąd

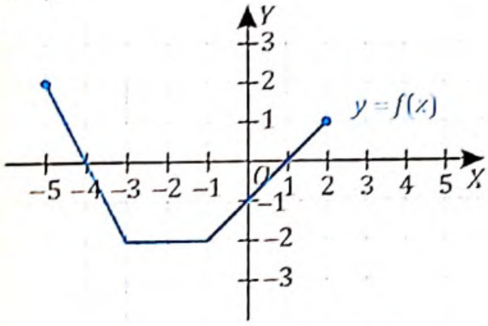
$g(x_1) > g(x_2)$ z określenia funkcji g.

Pokazaliśmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $g(x_1) > g(x_2)$, a to znaczy, że funkcja g jest malejąca.

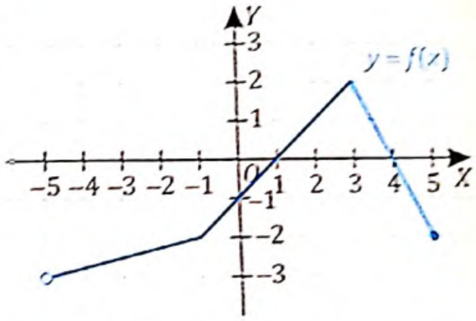
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = -f(x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

a)



b)



2. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy, przekształcając wykres funkcji f przez symetrię osiową względem osi OX. Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = -2x + 1$ c) $f(x) = \frac{3}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy, przekształcając wykres funkcji f przez symetrię osiową względem osi OY. Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ b) $f(x) = [x]$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = x + 1$

4. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór $\langle -4, 2)$. Jaka jest dziedzina funkcji $y = f(-x)$?

5. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$ jest przedział $(-3, 1\rangle$. Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$?