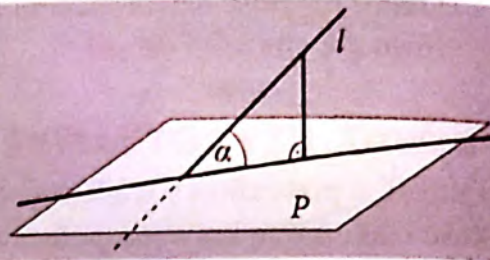


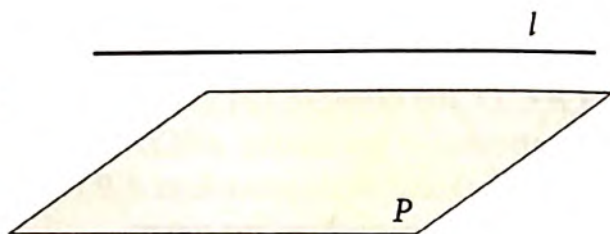
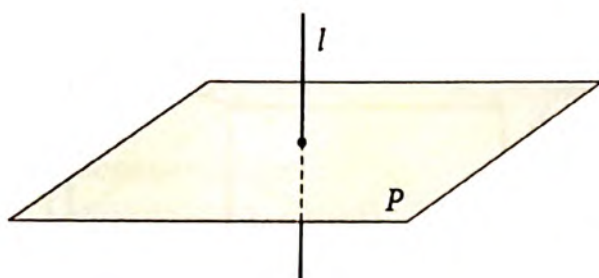
8. Kąt między prostą a płaszczyzną



Kątem między prostą a płaszczyzną nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



Jeśli rzutem prostokątnym prostej jest punkt, to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt 0° .

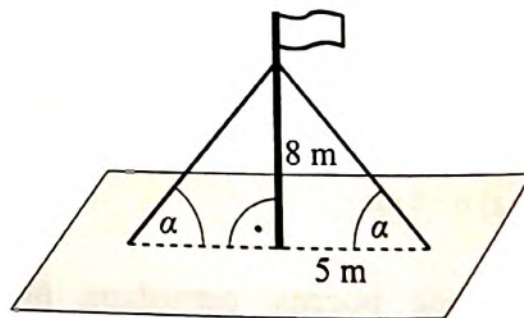


PRZYKŁAD 1

Wyznacz kąt, jaki z powierzchnią ziemi tworzą liny podtrzymujące maszt.

Szukany kąt został na rysunku oznaczony literą α .

Wówczas $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{5} = 1,6$, zatem $\alpha \approx 58^\circ$.



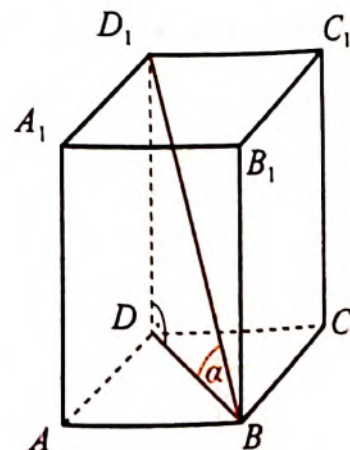
Ćwiczenie 1

Jeden koniec liny podtrzymującej 10-metrowy maszt zamocowany został w połowie jego wysokości. Drugi koniec zakotwiczone 4 metry od podstawy masztu. Znajdź kąt, jaki lina tworzy z powierzchnią ziemi.

PRZYKŁAD 2

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma 2 cm, a wysokość jest równa 8 cm. Wyznacz miarę kąta, jaki przekątna graniastosłupa tworzy z jego podstawą.

Na rysunku kolorem czerwonym zaznaczono przekątną BD_1 graniastosłupa oraz jej rzut na płaszczyznę podstawy



– odcinek BD . Ponieważ podstawa jest kwadratem o boku 2 cm, więc $|BD| = 2\sqrt{2}$ cm. Trójkąt D_1DB jest prostokątny, zatem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DD_1|}{|DB|} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,82, \text{ skąd } \alpha \approx 71^\circ.$$

Przekątna graniastostupa tworzy z podstawą kąt $\alpha \approx 71^\circ$.

Ćwiczenie 2

Przekątna graniastostupa prawidłowego czworokątnego ma 6 cm. Wyznacz miarę kąta, jaki przekątna graniastostupa tworzy z jego podstawą, jeśli wysokość graniastostupa jest równa:

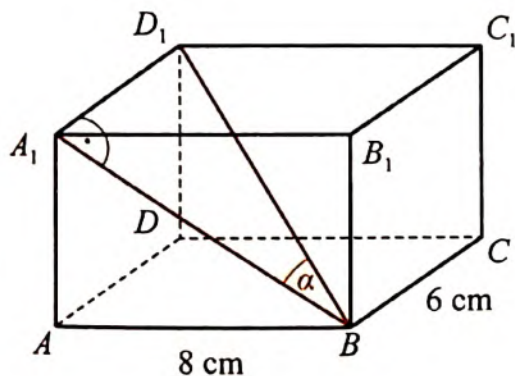
a) 3 cm,

b) 4 cm,

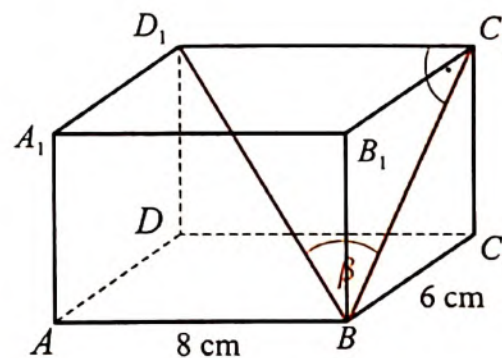
c) $3\sqrt{3}$ cm.

Ćwiczenie 3

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 6 cm i 8 cm. Przekątna tego prostopadłościanu ma 12 cm. Znajdź kąty, jakie przekątna ta tworzy ze ścianami bocznymi prostopadłościanu (na rysunkach poniżej oznaczono je przez α i β).



Odcinek A_1B jest rzutem prostokątnym przekątnej D_1B na ścianę ABB_1A_1 .



Odcinek C_1B jest rzutem prostokątnym przekątnej D_1B na ścianę BCC_1B_1 .

PRZYKŁAD 3

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma 4 cm, a krawędź boczna 8 cm. Jaki kąt tworzy krawędź boczna z podstawą tego ostrosłupa?

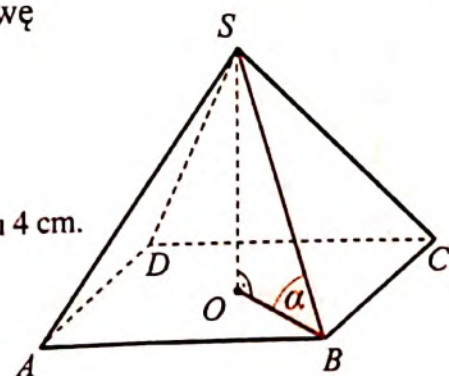
Odcinek BO jest rzutem krawędzi bocznej BS na podstawę ostrosłupa.

Szukany kąt został oznaczony na rysunku przez α .

Otrzymujemy $|OB| = 2\sqrt{2}$ [cm], Odcinek OB jest połową przekątnej kwadratu o boku 4 cm.

$$\text{stad } \cos \alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536.$$

Zatem $\alpha \approx 69^\circ$.

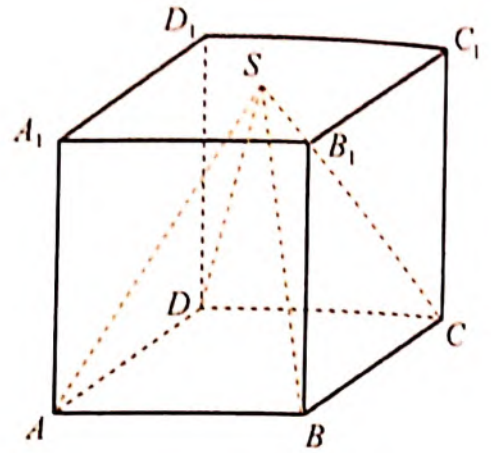


Ćwiczenie 4

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają długość równą 6. Jaki kąt tworzy krawędź boczna tego ostrosłupa z jego podstawą?

ZADANIA

1. Dany jest sześcian o krawędzi 2 cm (rysunek obok). Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych górnej podstawy sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Wskaż kąt, jaki krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą, i oblicz miarę tego kąta.



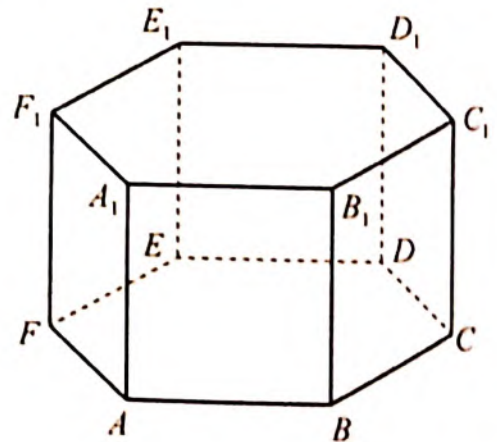
2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 4 cm. Jaką długość ma krawędź boczna tego ostrosłupa, jeśli tworzy ona z podstawą ostrosłupa kąt:

- a) 30° , b) 45° , c) 60° ?

3. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma 12 cm i tworzy z jego ścianą boczną kąt 30° . Oblicz pole podstawy i objętość tego graniastosłupa.

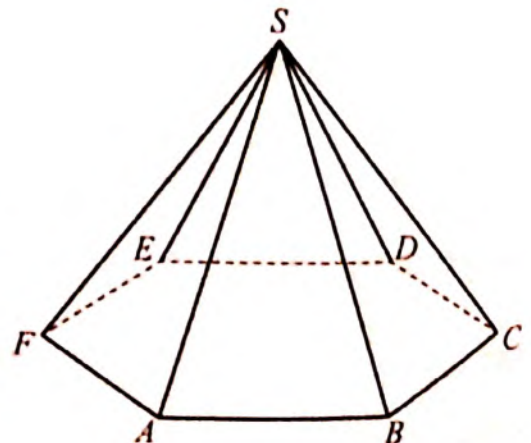
4. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym (rysunek obok) wskaż kąt między jego:

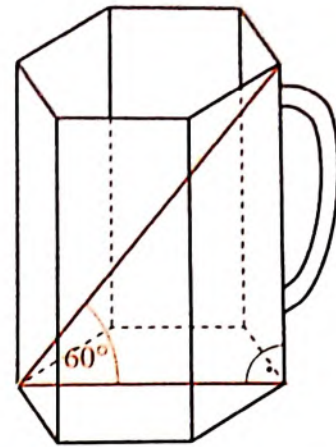
- dłuższą przekątną i płaszczyzną podstawy,
- krótszą przekątną i płaszczyzną podstawy,
- dłuższą i krótszą przekątną, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,
- dwiema krótszymi przekątnymi, wychodzącymi z tego samego wierzchołka.



5. Wskaż kąt między krawędzią boczną ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego (rysunek obok) a jego podstawą. Oblicz miarę tego kąta, jeśli wysokość ostrosłupa wynosi 6 cm, a krawędź jego podstawy ma długość równą:

- a) $2\sqrt{3}$ cm, b) 6 cm, c) $6\sqrt{3}$ cm.



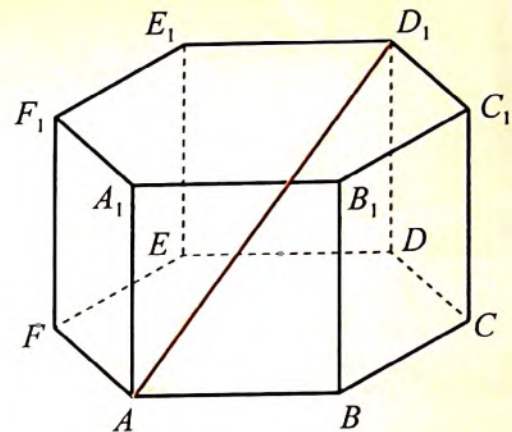


6. Dzbanek do mleka ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 26 cm. Kąt między dłuższą przekątną graniastosłupa i jego podstawą (rysunek wyżej) jest równy 60° . Czy w dzbanku zmieści się 1,5 l mleka?

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

7. Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (rysunek obok) mają po 2 cm. Wskaż zdania prawdziwe.

- I. Długość przekątnej AD_1 tego graniastosłupa jest równa $2\sqrt{5}$ cm.
 II. Przekątna AD_1 tworzy z podstawą graniastosłupa kąt 30° .
 III. Objętość tego graniastosłupa jest równa $12\sqrt{3}$ cm³.

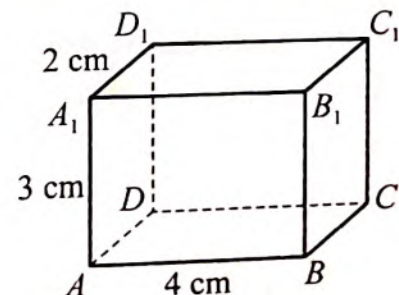


8. Przekątna AD_1 graniastosłupa opisanego w poprzednim zadaniu tworzy ze ścianą ABB_1A_1 kąt, którego tangens jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

POWTÓRZENIE

1. Dany jest prostopadłościan o wymiarach przedstawionych na rysunku obok. Wskaż kąty między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianami bocznymi i podstawą. Oblicz miary tych kątów.
2. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma 18 cm. Oblicz miarę kąta, jaki ta krawędź tworzy z podstawą ostrosłupa, jeśli jego wysokość jest równa:



- a) 4 cm, b) $9\sqrt{3}$ cm, c) 12 cm.