

7. Objętość ostrosłupa



Przypomnijmy poznany w gimnazjum wzór na objętość ostrosłupa.

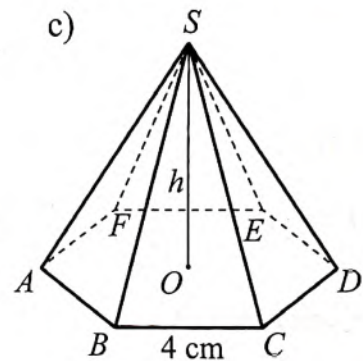
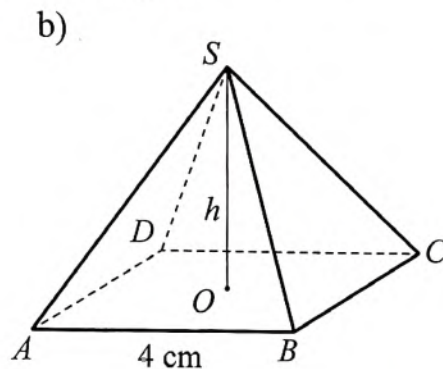
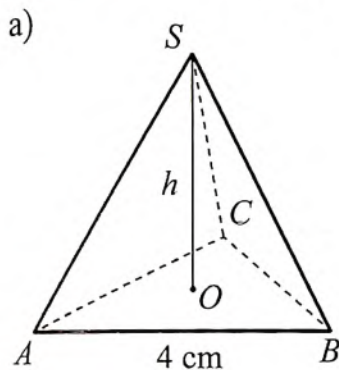
Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h ,$$

Gdzie P_p jest polem podstawy, a h – wysokością ostrosłupa.

Ćwiczenie 1

Przedstawiony na rysunku ostrosłup jest ostrosłupem prawidłowym o wysokości $h = 5$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



PRZYKŁAD 1

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 10 cm, jeśli tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną wynosi 0,3.

Rozpatrzmy trójkąt SOC (rysunek obok).

Wówczas $\frac{x}{10} = \operatorname{tg} \alpha$,

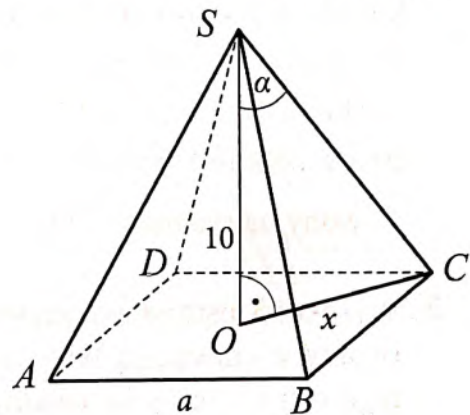
stąd $x = 10 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot 0,3 = 3$ [cm].

Przekątna podstawy AC ma długość równą 6 cm,

stąd krawędź podstawy $a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ [cm].

Pole podstawy $P_p = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$ [cm²].

Objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 10 = 60$ [cm³].



Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 6 cm, jeśli tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną wynosi $\frac{4}{3}$.

PRZYKŁAD 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna ma 10 cm.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny SOC .

Wówczas $|CO|^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$,

stąd $|CO| = 6$ [cm].

Ponieważ trójkąt ABC (podstawa ostrosłupa) jest równoboczny,

więc $|CO| = \frac{2}{3}|CD|$, stąd $|CD| = 9$ [cm].

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC .

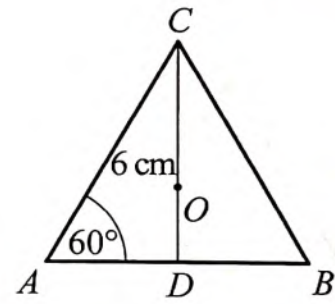
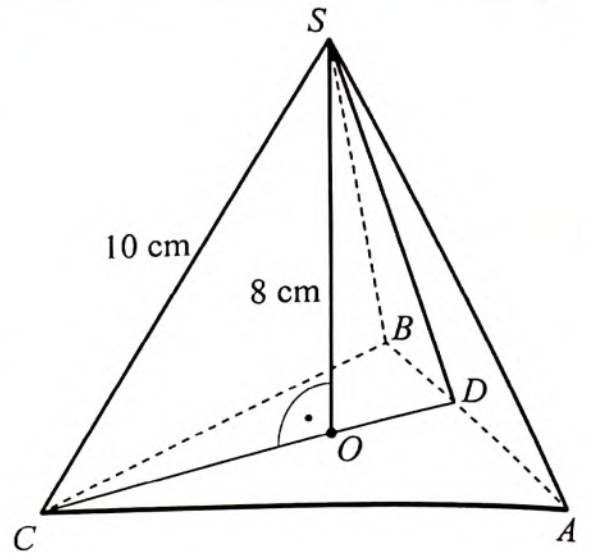
Wówczas $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 9$, stąd $a = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ [cm].

Pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Objętość ostrosłupa

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}.$$

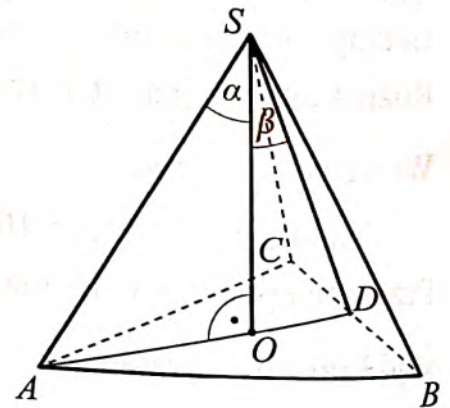


Ćwiczenie 3

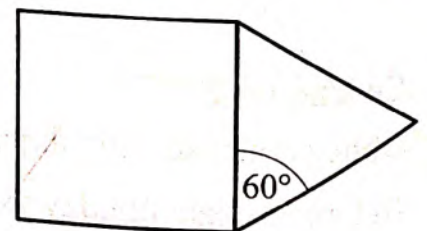
Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma 12 cm, a wysokość ściany bocznej 15 cm.

ZADANIA

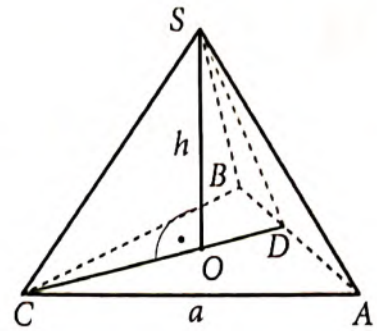
1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm i tworzy:
 - a) z krawędzią boczną taki kąt α (kolor zielony na rysunku obok), że $\text{tg } \alpha = 0,5$,
 - b) z wysokością ściany bocznej taki kąt β (kolor czerwony na rysunku obok), że $\text{tg } \beta = \frac{1}{3}$.
2. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z krawędzią boczną kąt 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawa ma pole równe 36 cm^2 .



3. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy jest równe 16 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

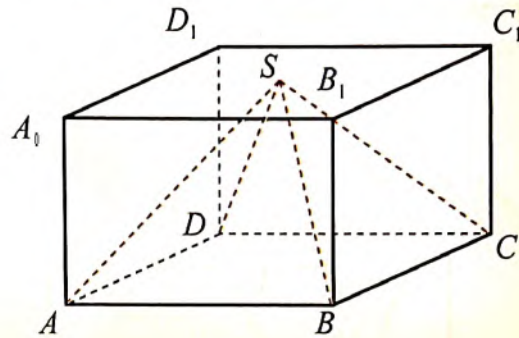


4. a) Uzasadnij, że wysokość h czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się wzorem $h = a \frac{\sqrt{6}}{3}$.
 b) Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi równej 8 cm.



SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

5. Ostrosłup prawidłowy trójkątny, czworokątny i sześciokątny mają taką samą wysokość i taką samą krawędź podstawy. Wskaż zdania prawdziwe.
 I. Ostrosłup trójkątny i czworokątny mają taką samą objętość.
 II. Ostrosłup czworokątny ma ponaddwukrotnie większą objętość od ostrosłupa trójkątnego.
 III. Ostrosłup sześciokątny ma objętość sześciokrotnie większą od objętości ostrosłupa trójkątnego.
6. Prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ ma objętość 111 cm^3 . Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S należącym do prostokąta $A_1B_1C_1D_1$. Objętość tego ostrosłupa jest równa
- A. 36 cm^3 C. 40 cm^3
 B. 37 cm^3 D. 42 cm^3



POWTÓRZENIE

1. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Obwód jego podstawy wynosi 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli jest to ostrosłup prawidłowy:
 a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

2. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym o kącie α przy podstawie i ramieniu równym 13 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

