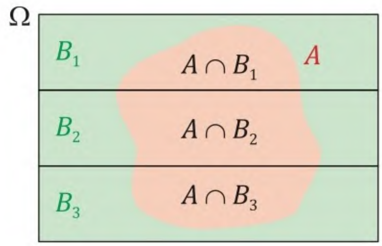
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Niech rysunek poniżej przedstawia przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, w której zawiera się zdarzenie A.



Zdarzenia B_1, B_2, B_3 są parami wykluczające się i wypełniają przestrzeń Ω (tzn. $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$). Wówczas zdarzenia

$$A \cap B_1 \qquad A \cap B_2 \qquad A \cap B_3$$

też są parami wykluczające się oraz

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

A więc prawdopodobieństwo zdarzenia A możemy obliczać „po kawałku".

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Z poprzedniego tematu wiemy, że

$$P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A \cap B_3) = P(A|B_3) \cdot P(B_3), \qquad \text{zatem}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (o prawdopodobieństwie całkowitym)

Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$
(czyli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wykluczają się parami)
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,

to

(*) $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$

Wzór (*) nazywa się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

Przykład 1.

Daltonizm to wada wzroku polegająca na zaburzeniu rozpoznawania barwy zielonej i czerwonej. Dotyka ona przeciętnie pięć kobiet na tysiąc i ośmiu mężczyzn na stu. Z licznej grupy osób, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 2 : 8, wylosowano jedną osobę. Ile jest równe prawdopodobieństwo wylosowania osoby dotkniętej daltonizmem?

Przyjmujemy oznaczenie zdarzenia

A – „wylosowana osoba dotknięta jest daltonizmem".

Oczywiście prawdopodobieństwo zdarzenia A zależy od tego, czy wybrana osoba jest kobietą, czy mężczyzną. Zatem

B_1 – „wylosowana osoba jest kobietą"

B_2 – „wylosowana osoba jest mężczyzną".

Oczywiście $\quad B_1 \cap B_2 = \varnothing \quad$ i $\quad B_1 \cup B_2 = \Omega, \quad$ ponadto

$P(B_1) = 0{,}2 \qquad P(B_1) > 0 \qquad P(B_2) = 0{,}8 \qquad P(B_2) > 0$

Zatem są spełnione założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Mamy również

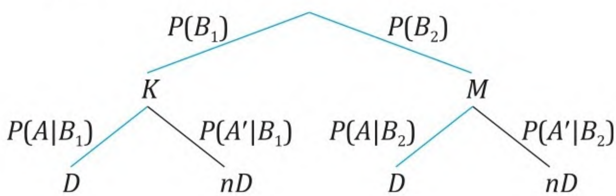
$P(A|B_1) = 0{,}005 \qquad P(A|B_2) = 0{,}08, \qquad$ więc

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A) = 0{,}005 \cdot 0{,}2 + 0{,}08 \cdot 0{,}8 = 0{,}001 + 0{,}064 = 0{,}065$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,065.

Rozwiązania tego typu zadań można w prosty sposób ilustrować na drzewach. W przypadku naszego zadania drzewo będzie wyglądać tak.



Zatem

$\Omega = \{(K, D), (K, nD), (M, D), (M, nD)\}$

$B_1 = \{(K, D), (K, nD)\} \qquad B_2 = \{(M, D), (M, nD)\}$

$A = \{(K, D), (M, D)\},$

gdzie

K – oznacza, że wylosowano kobietę

M – oznacza, że wylosowano mężczyznę

D – oznacza, że wylosowana osoba jest daltonistą

nD – oznacza, że wylosowana osoba nie jest daltonistą.

Zastanówmy się jeszcze nad następującym zagadnieniem dotyczącym przykładu 1.

Wylosowana osoba okazała się dotknięta daltonizmem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna? Pytamy zatem, ile jest równe prawdopodobieństwo $P(B_2|A)$. Mamy

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)}, \qquad \text{więc}$$

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}8}{0{,}065} = \frac{64}{65}$$

Prawdopodobieństwo to – jak widać – jest bardzo wysokie.

Zauważmy, że postawione wyżej pytanie dotyczy <u>przebiegu</u> doświadczenia losowego w sytuacji, gdy znany jest jego wynik (wylosowano osobę mającą daltonizm). Natomiast pytanie postawione w przykładzie 1. dotyczy <u>wyniku</u> doświadczenia losowego.

Twierdzenie 2.

Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:
1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,

to

(**) $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}, \text{ gdzie}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Wzór (**) nazywa się wzorem Bayesa.

Twierdzenie 2. łatwo jest udowodnić, korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Przykład 2.

W szufladzie było 5 nowych i 8 używanych piłek do gry w tenisa. Do pierwszej gry wzięto losowo z tej szuflady 2 piłki i po grze włożono je z powrotem do szuflady. Do drugiej gry wzięto losowo z tej szuflady 3 piłki. Ile jest równe prawdopodobieństwo wzięcia do drugiej gry 3 nowych piłek?

Prawdopodobieństwo zdarzenia, które mamy policzyć, zależy od tego, ile nowych piłek wyjęto z szuflady do pierwszej gry.

Oznaczmy zdarzenia:

A – „do drugiej gry wzięto 3 piłki nowe”

B_1 – „do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe”

B_2 – „do pierwszej gry wzięto 1 piłkę używaną i 1 piłkę nową”

B_3 – „do pierwszej gry wzięto 2 piłki używane”.

$$P(B_1)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}} \qquad P(B_2)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}} \qquad P(B_3)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}}$$

Zdarzenia B_1, B_2, B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Obliczamy $P(A|B_1)$. Zakładamy, że do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe, zatem po tej grze w szufladzie było 10 piłek używanych i 3 piłki nowe.

$$P(A|B_1)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}$$

Podobnie obliczamy $P(A|B_2)$ i $P(A|B_3)$. Otrzymujemy:

$$P(A|B_2)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}} \qquad P(A|B_3)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}$$

Obliczamy $P(A)$.

$$P(A)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}\cdot\frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}}=\frac{75}{3718}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{75}{3718}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. W I pudełku znajduje się 6 kul niebieskich i 4 kule czerwone, zaś w II pudełku – 4 kule niebieskie i 5 czerwonych. Losujemy jedną kulę z I pudełka i – nie oglądając jej – wrzucamy do II pudełka. Następnie wybieramy losowo kulę z II pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że druga wylosowana kula będzie czerwona.

2. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej firmy towary wadliwe stanowią odpowiednio 5% i 3%. Pierwsza z tych firm dostarcza do hurtowni dwa razy więcej wyrobów niż druga. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jedna sztuka towaru zakupiona w tej hurtowni okaże się dobra.