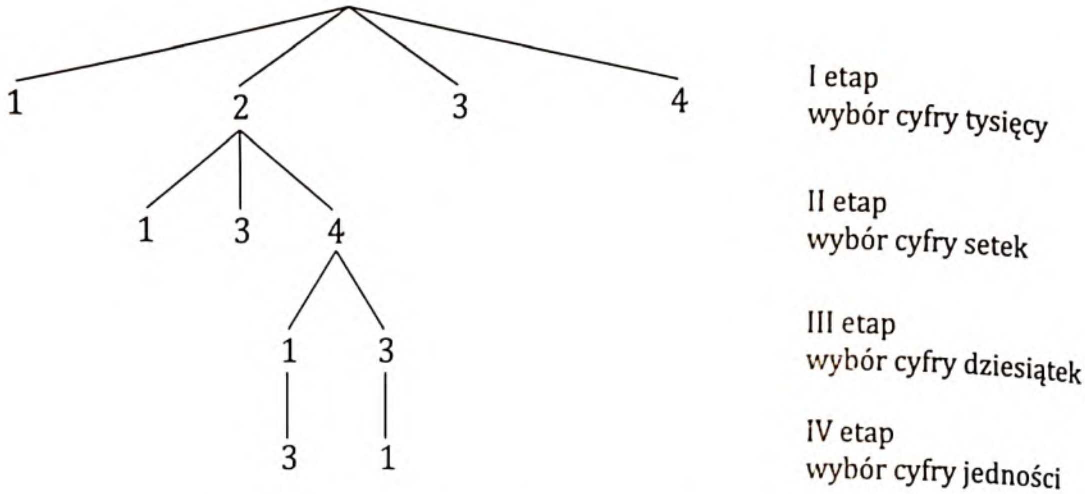
Permutacje

W tym temacie omówimy szczególny przypadek wariacji bez powtórzeń.

Przykład 1.

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Naszkicujmy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach.



Kolejność wybieranych cyfr jest istotna, cyfry nie mogą się powtarzać. Łatwo zauważyć, że w każdej liczbie czterocyfrowej występować będą wszystkie cztery cyfry. Wyznaczmy ich liczbę: cyfrę tysięcy możemy wybrać na 4 sposoby; cyfrę setek możemy wybrać na 3 sposoby (pomijamy wybraną cyfrę tysięcy); cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 2 sposoby (pomijamy cyfrę tysięcy i cyfrę setek). Ostatnią cyfrę możemy „wybrać" już tylko na 1 sposób, zatem wszystkich takich liczb jest

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Można utworzyć 24 liczby czterocyfrowe.

UWAGA: Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od n do 1 często występuje w kombinatoryce. W związku z tym wprowadzono specjalny symbol oznaczający taki iloczyn: $n!$ (czytaj: „n silnia").

Definicja 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \qquad \text{jeśli } n \in \boldsymbol{N}, n > 1$$

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

Przykład 2.

a) $6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

b) $8! - 7! = 8 \cdot 7! - 7! = 7!(8-1) = 7 \cdot 7!$

c) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

d) $\frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

UWAGA: Zgodnie z twierdzeniem 2. ze str. 271 liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \boldsymbol{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Liczbę tę można również zapisać tak

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Wracając do przykładu 1., można powiedzieć, że liczb czterocyfrowych spełniających warunki zadania jest 4!

Przykład 3.

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru {0, 1, 2, 3}?

Liczb czterocyfrowych jest tyle, ile czterowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru {0, 1, 2,3} i pierwszym wyrazie różnym od zera. Zatem:
- cyfrę tysięcy można wybrać na 3 sposoby (pomijamy zero)
- cyfrę setek można wybrać też na 3 sposoby (pomijamy cyfrę tysięcy, ale dołączamy zero)
- cyfrę dziesiątek można wybrać na 2 sposoby
- cyfrę jedności można wybrać na 1 sposób.

Wszystkich liczb jest więc

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $3 \cdot 3!$)

Można utworzyć 18 liczb czterocyfrowych.

Przykład 4.

Pięcioro przyjaciół: Ania, Bartek, Cezary, Dorota i Ela kupiło bilety do kina. Mają oni zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie.

a) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca?

b) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie?

Ad a)

Pierwsze miejsce może być zajęte na 5 sposobów, drugie – na 4 sposoby, trzecie – na 3 sposoby, czwarte – na 2 sposoby i piąte – na 1 sposób. Wszystkich możliwości jest

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $5!$)

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie na 120 sposobów.

Ad b)
Zadanie to rozwiążemy w trzech etapach.

I etap – wybieramy dwa sąsiednie miejsca dla Ani i Bartka:

(□, □, , ,)   (, □, □, ,)   (, , □, □,)   (, , , □, □)

Są 4 możliwości wybrania dwóch sąsiednich miejsc.

II etap – ustalamy, w jakiej kolejności zajmą miejsca Ania i Bartek:

(A, B, , ,)   **(B, A, , ,)**

Są 2 możliwości wyboru miejsc dla Ani i Bartka (przy ustalonych dwóch sąsiednich miejscach).

III etap – wybieramy miejsca dla pozostałych trzech osób.
Można to zrobić na 3! sposobów (przy ustalonych miejscach dla Ani i Bartka).

Wszystkich możliwości wyboru miejsc jest więc

$4 \cdot 2 \cdot 3!$ (czyli $2 \cdot 4!$)

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie, na 48 sposobów.

Przykład 5.

W zespole tanecznym jest 5 dziewczynek i 5 chłopców. Każda dziewczynka tańczy z chłopcem. Ile jest różnych możliwości utworzenia pięciu par tanecznych?

Ustawiamy dziewczynki w szeregu. Pierwszej dziewczynce można przyporządkować jednego z 5 chłopców, drugiej – jednego z pozostałych 4 chłopców, trzeciej – jednego z pozostałych 3 chłopców, czwartej dziewczynce – jednego chłopca z pozostałych 2 i piątej dziewczynce przyporządkowujemy ostatniego chłopca. Pięć par tanecznych można utworzyć na

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (czyli $5!$)

sposobów.
Pięć par tanecznych można utworzyć na 120 sposobów.

Przykład 6.

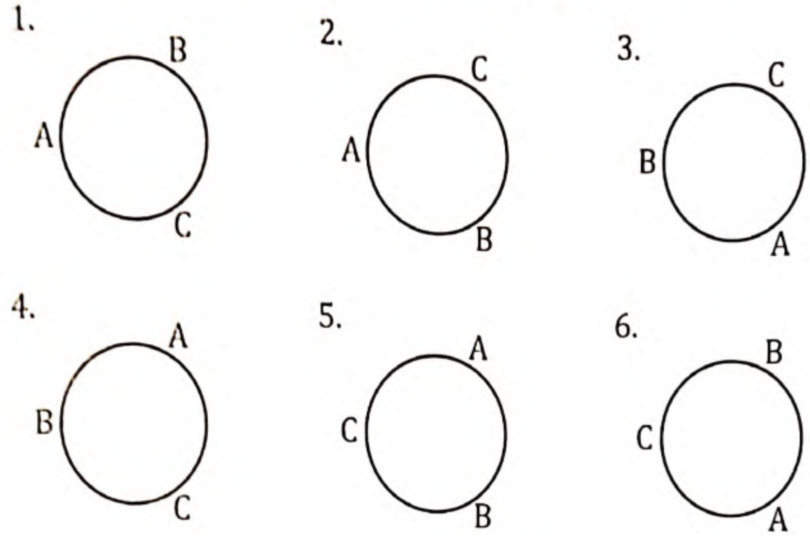
Ile jest sposobów zajęcia miejsc przy okrągłym stole przez:
a) 3 osoby   b) 10 osób?

Rozwiązanie tego zadania zależy od sprecyzowania, jakie dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne. Rozpatrzmy dwa modele.

Model 1.
Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej dwie osoby będą siedziały na innych krzesłach. W takim wypadku liczba rozmieszczeń przy okrągłym stole jest taka sama, jak liczba rozmieszczeń tych osób w szeregu.

Model 2.
Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej jedna osoba po co najmniej jednej stronie będzie mieć innego sąsiada.

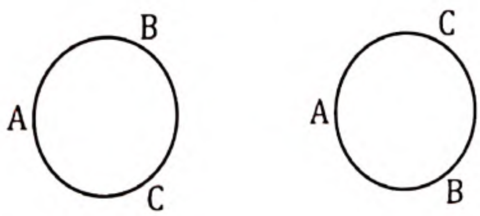
Ad a)
Model 1.
Liczba rozmieszczeń jest równa 3! (czyli 6). Rysunek poniżej przedstawia te rozmieszczenia; osoby zostały oznaczone literami A, B, C.



Model 2.
Zauważ, że na rysunku 1., 3. i 5. każda osoba siedząca przy stole ma takich samych sąsiadów. Zatem w tym przypadku takie rozmieszczenia uznajemy za identyczne. Jeśli osoby A, B, C będą siedzieć jak na rysunku 1., a następnie przesiądą się o jedno miejsce w lewo, to otrzymamy rozmieszczenie jak na rysunku 3.; jeśli znowu przesiądą się o jedno miejsce w lewo, to otrzymamy rozmieszczenie takie, jak na rysunku 5.

Podobnie jest w wypadku rysunków 2., 4. i 6. Każda z osób przedstawionych na tych rysunkach ma takich samych sąsiadów, więc i takie trzy rozmieszczenia uznajemy za identyczne.

Ostatecznie więc – w modelu 2. – są dwa różne rozmieszczenia trzech osób przy okrągłym stole.



Ad b)

Model 1.
Liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa liczbie ustawień 10 osób w szeregu i wynosi 10!

Model 2.
Dla pierwszej osoby wybieramy miejsce przy okrągłym stole i ta osoba nie zmienia tego miejsca (zobacz: osoba A w punkcie a), model 2.). Pozostałych 9 osób może zmieniać miejsce na 9! sposobów. Każda zmiana miejsc przez te osoby powoduje, że co najmniej jedna osoba ma innych sąsiadów.
Liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa 9!

Definicja 1.

Permutacją (bez powtórzeń) n-elementowego zbioru A, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru A.

Twierdzenie 1.

Liczba permutacji (bez powtórzeń) zbioru n-elementowego, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest równa $n!$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. **Oblicz:**

   a) $3! + 4!$ b) $6! - 4!$ c) $2! \cdot 3! \cdot 4!$ d) $10! : 8!$

2. **Ile jest różnych liczb siedmiocyfrowych utworzonych z cyfr należących do zbioru {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, jeśli cyfry w liczbie się nie powtarzają?**
3. **Ile jest różnych liczb sześciocyfrowych parzystych, utworzonych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6}, jeśli cyfry w liczbie się nie powtarzają?**
4. **Na ile sposobów może wejść do autokaru jednym wejściem 7 osób, wśród których są trzy kobiety i czterej mężczyźni, jeśli najpierw wsiadają kobiety?**
5. **Na ile sposobów Marta może wysłać cztery różne pocztówki z wakacji do czterech przyjaciółek?**
6. **Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 4 chłopców i 4 dziewcząt, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?**