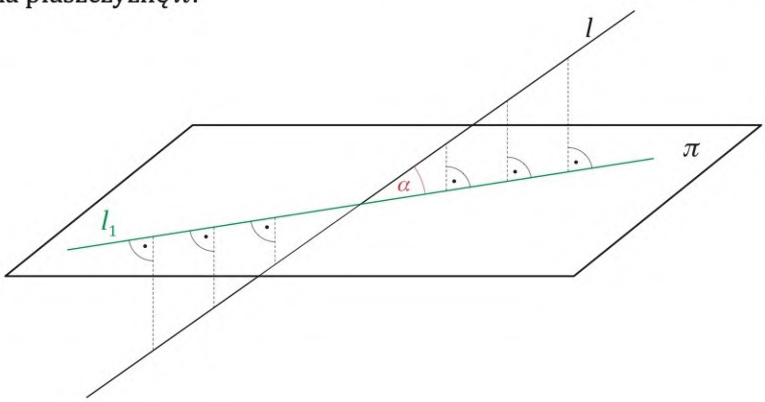
Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt zerowy. Jeśli natomiast prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt prosty. Omówimy teraz, jak określa się kąt między prostą a płaszczyzną w przypadku „pośrednim”, to znaczy wtedy, gdy prosta przebija płaszczyznę i nie jest do niej prostopadła.

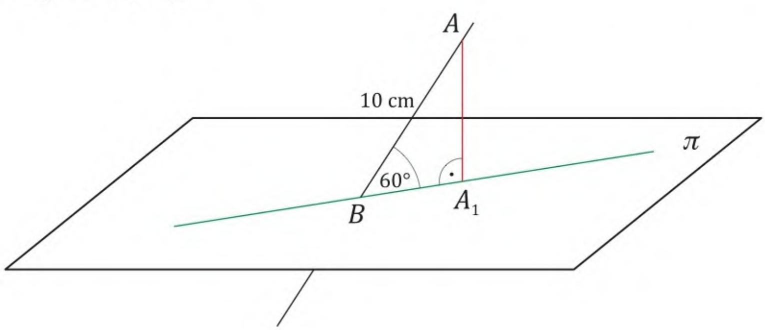
Definicja 1.

Kątem między prostą l (przebijającą płaszczyznę π i nieprostopadłą do niej) **a płaszczyzną π** nazywamy kąt ostry α między prostą l a jej rzutem prostokątnym l_1 na płaszczyznę π.



Przykład 1.

Przez punkt A poprowadzono prostą przebijającą płaszczyznę π w punkcie B i tworzącą z tą płaszczyzną kąt $60°$. Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, wyznaczymy odległość punktu A od płaszczyzny π.



Rysunek powyżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Punkt A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Prosta BA_1 jest rzutem prostokątnym prostej BA na płaszczyznę π (dlaczego?). Szukamy długości odcinka AA_1.
Rozważmy trójkąt BA_1A. Jest to trójkąt prostokątny o kącie ostrym 60°. Zatem:

$$|AB| = 2|BA_1| \text{ i } |AA_1| = \sqrt{3}|BA_1|$$

Łatwo więc obliczyć, że

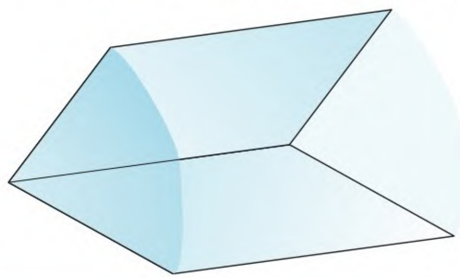
$$|AA_1| = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa $5\sqrt{3}$ cm.

Każda prosta leżąca na płaszczyźnie dzieli ją na dwie części. Każdą z tych części wraz z daną prostą nazywamy półpłaszczyzną. Sama prosta nazywa się krawędzią półpłaszczyzny.

Definicja 2.

Kątem dwuściennym nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z dwóch obszarów, które te półpłaszczyzny wycinają z przestrzeni.



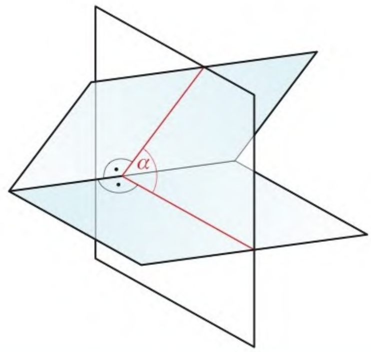
Wspólną krawędź półpłaszczyzn nazywamy **krawędzią kąta dwuściennego**, a same półpłaszczyzny – **ścianami kąta dwuściennego**.

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi wyznaczają dwa kąty dwuścienne. Na rysunku powyżej zaznaczono wypukły kąt dwuścienny. (Figury wypukłe i figury wklęsłe w przestrzeni określamy tak samo jak na płaszczyźnie. Przypomnijmy: figurę nazywamy figurą wypukłą wtedy, gdy dla dowolnych punktów A, B, należących do tej figury, odcinek AB zawiera się w tej figurze. Figurę, która nie jest wypukła, nazywamy figurą wklęsłą albo niewypukłą.)

Powstaje pytanie, jak mierzyć kąty dwuścienne.

Definicja 3.

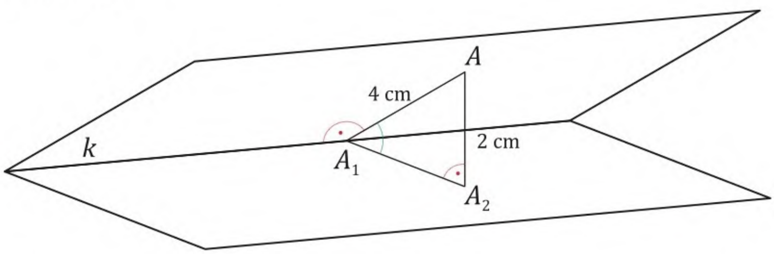
Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy część wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.



Miarę kąta liniowego przyjmuje się za miarę kąta dwuściennego. Zauważ, że krawędź kąta dwuściennego jest prostopadła do ramion odpowiadającego mu kąta liniowego (dlaczego?).

Przykład 2.

Odległość punktu A leżącego na ścianie kąta dwuściennego od krawędzi k tego kąta jest równa 4 cm, a od drugiej ściany kąta jest równa 2 cm. Wyznaczymy miarę tego kąta dwuściennego.



Rysunek powyżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu. Pokażemy najpierw, że płaszczyzna (AA_1A_2) jest prostopadła do krawędzi kąta.
Zauważ, że odcinek A_1A_2 jest rzutem prostokątnym odcinka A_1A na płaszczyznę (wyznaczoną przez drugą ścianę kąta dwuściennego). Wiemy też z założenia, że

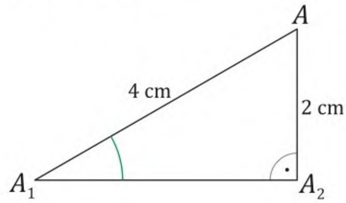
$$AA_1 \perp k,$$

zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$$A_1A_2 \perp k$$

Prosta k jest więc prostopadła do dwóch prostych: pr. A_1A i pr. A_1A_2, czyli jest prostopadła do płaszczyzny (AA_1A_2). Miarą kąta dwuściennego jest więc miara kąta A_2A_1A.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AA_1A_2.



Łatwo stwierdzić, że

$$|\sphericalangle A_2A_1A| = 30°$$

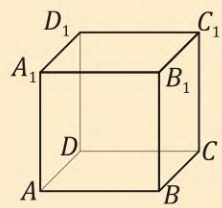
Miara kąta dwuściennego jest równa 30°.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A. Punkt B należy do prostej k i długość odcinka AB jest równa 10 cm. Oblicz odległość punktu B od płaszczyzny π, jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:
   a) 30° b) 45° c) 60°.

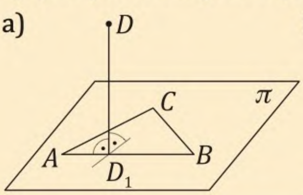
2. Odcinek AB zawiera się w płaszczyźnie π. Punkt C leży w odległości równej długości odcinka AB od płaszczyzny π. Oblicz miarę kąta między prostą AC a płaszczyzną π, jeśli rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π jest:
   a) punkt B b) punkt A c) środek odcinka AB.

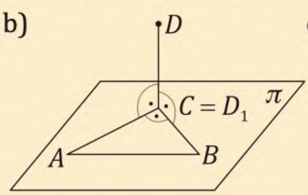
3. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Zaznacz kąt nachylenia:
   a) prostej BC_1 do płaszczyzny $(ABCD)$
   b) prostej AC_1 do płaszczyzny $(A_1B_1C_1D_1)$
   c) prostej AD do płaszczyzny (DBB_1D_1)
   d) prostej BE do płaszczyzny (BCC_1B_1), gdzie punkt E jest środkiem odcinka C_1D_1.



4. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkt E jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu DCC_1D_1. Oblicz sinus kąta nachylenia prostej AE do płaszczyzny $(ABCD)$.

5. Na płaszczyźnie π dany jest trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Punkt D nie należy do płaszczyzny π. Zaznacz kąty między każdą z prostych AD, BD, CD a płaszczyzną π, jeśli rzut prostokątny punktu D na płaszczyznę π:
   a) leży między punktami A i B
   b) jest punktem wspólnym wysokości trójkąta ABC
   c) jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC.

a)


b)


c)