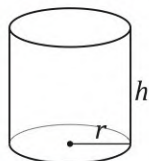


## Objętość brył obrotowych

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

### Twierdzenie 1.

Objętość  $V$  walca o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$  wyraża się wzorem

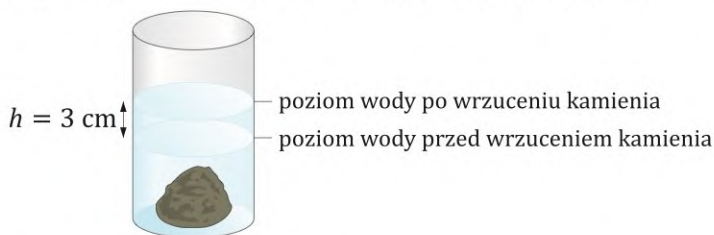


$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Objętość walca jest równa iloczynowi pola podstawy walca i jego wysokości.

### Przykład 1.

Do naczynia w kształcie walca napełnionego częściowo wodą wrzucono kamień, który zanurzył się całkowicie. Poziom wody podniósł się o 3 cm. Wiedząc, że promień podstawy naczynia ma długość 5 cm, wyznaczmy objętość kamienia.



Kamień wypiera wodę o takiej objętości, jaką sam ma, dlatego też objętość  $V$  kamienia jest równa objętości walca o wysokości 3 cm i promieniu podstawy 5 cm.

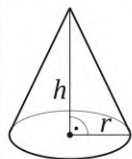
$$V = \pi r^2 \cdot h, \text{ gdzie } r = 5 \text{ i } h = 3$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi$$

Objętość kamienia jest równa  $75\pi \text{ cm}^3$ , czyli ok.  $235,5 \text{ cm}^3$ .

### Twierdzenie 2.

Objętość  $V$  stożka o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $r$  wyraża się wzorem

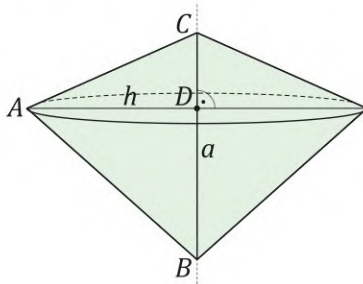


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Objętość stożka jest równa jednej trzeciej objętości walca o takiej samej wysokości i takim samym promieniu podstawy, jak dany stożek.

**Przykład 2.**

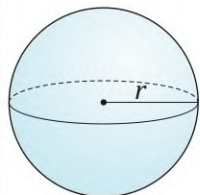
Trójkąt ostrokątny  $ABC$  obraca się wokół prostej zawierającej bok  $BC$  mający długość  $a$ . Wyznamy objętość otrzymanej bryły w zależności od pola  $P$  trójkąta  $ABC$ .



Niech  $h$  oznacza wysokość trójkąta  $ABC$  opuszczoną na bok  $BC$ . W wyniku obrotu trójkąta  $ABC$  wokół prostej  $BC$  otrzymujemy bryłę, która jest sumą dwóch stożków złączonych podstawami.

**Twierdzenie 3.**

Objętość  $V$  kuli o promieniu  $r$  wyraża się wzorem



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

**Przykład 3.**

Pole powierzchni kuli  $K_1$  jest 9 razy większe od pola powierzchni kuli  $K_2$ . Ile razy objętość kuli  $K_1$  jest większa od objętości kuli  $K_2$ ?

Objętość kuli  $K_1$  jest 27 razy większa od objętości kuli  $K_2$ .

**Przykład 4.**

Do miski w kształcie półsfery włożono cztery jednakowe pomarańcze. Gdy miskę przykryto płaską pokrywką, okazało się, że każda pomarańcza dotyka pokrywkę. Średnica miski jest równa 24 cm. Obliczmy, jaką objętość (z dokładnością do  $1 \text{ cm}^3$ ) ma każda z pomarańczy.

***Sprawdź, czy rozumiesz***

1. Objętość walca wynosi  $45 \text{ cm}^3$ , a pole powierzchni bocznej jest równe  $30 \text{ cm}^2$ . Oblicz wysokość tego walca.
2. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych mających długość  $15 \text{ cm}$  i  $20 \text{ cm}$  wokół:  
a) krótszej przyprostokątnej                      b) przeciwprostokątnej.
3. Objętość kuli  $K_1$  jest 125 razy większa od objętości kuli  $K_2$ . Ile razy pole powierzchni kuli  $K_1$  jest większe od pola powierzchni kuli  $K_2$ ?