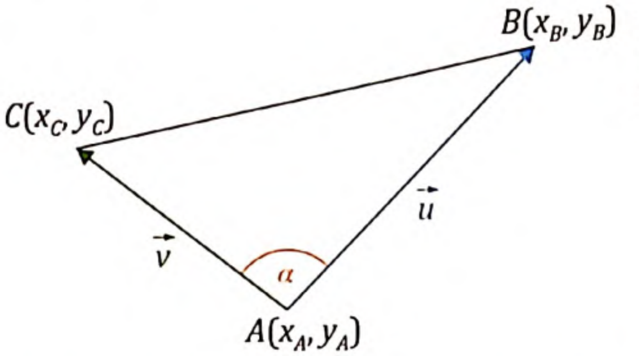
Pole trójkąta. Pole wielokąta

W tym temacie nauczymy się obliczać pole wielokąta, gdy dane są współrzędne wszystkich jego wierzchołków. Najpierw wyprowadzimy wzór na pole trójkąta.

Niech punkty $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ będą wierzchołkami dowolnego trójkąta ABC. Wprowadzimy oznaczenia: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha = \left|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right|$ (patrz rysunek poniżej).



$\vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$

$\vec{v} = [x_C - x_A, y_C - y_A]$

Pole trójkąta ABC jest równe połowie iloczynu długości boków trójkąta i sinusa kąta zawartego między nimi, czyli

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$$

Zatem

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \sin\left|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right|$$

Wiemy, że

$$\sin\left|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right| = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$$

Zatem pole trójkąta ABC wyraża się wzorem

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{1}{2} \cdot |u_1v_2 - u_2v_1|$$

Liczbę $u_1v_2 - u_2v_1$ nazywamy wyznacznikiem wektorów $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i oznaczamy $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Wzór na pole trójkąta ABC możemy zapisać w postaci

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\det(\vec{u}, \vec{v})\right|, \quad \text{gdzie } \vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A],\ \vec{v} = [x_C - x_A, y_C - y_A]$$

Stąd

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{matrix}\right\|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|$$

Podsumujmy nasze spostrzeżenia.

Aby obliczyć pole trójkąta, gdy znamy współrzędne wszystkich jego wierzchołków wystarczy obliczyć współrzędne dwóch wektorów zaczepionych w jednym z wierzchołków trójkąta, o końcach w pozostałych wierzchołkach, a następnie obliczyć połowę wartości bezwzględnej wyznacznika tych wektorów.

Przykład 1.

Obliczymy pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A(-8,-3)$, $B(3,2)$, $C(-5,4)$.

Wyznaczamy współrzędne wektorów:

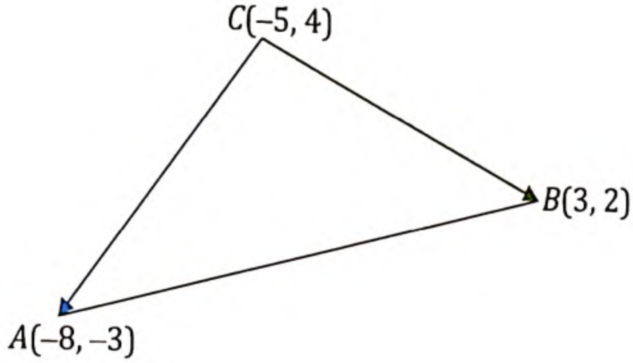
$$\overrightarrow{CB}=[3-(-5),2-4]=[8,-2]$$

$$\overrightarrow{CA}=[-8-(-5),-3-4]=[-3,-7]$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\right|$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}8 & -2\\ -3 & -7\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|-56-6|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|-62|=31$$



Pole trójkąta ABC jest równe 31.

Przykład 2.

Obliczymy pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(-1,4)$, $D(-3,0)$.

Dzielimy czworokąt $ABCD$ na trójkąty: ABC i ACD.
Obliczamy pola tych trójkątów:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|,$$

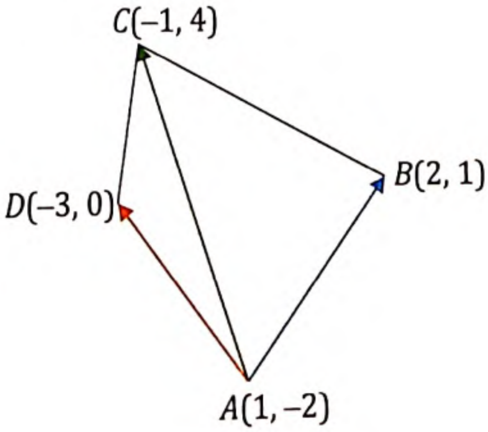
gdzie $\overrightarrow{AB}=[1,3]$, $\overrightarrow{AC}=[-2,6]$

$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|,$$

gdzie $\overrightarrow{AD}=[-4,2]$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 3\\ -2 & 6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|6+6|=6$$

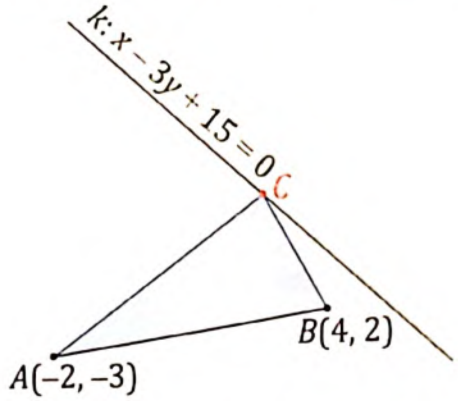
$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-2 & 6\\ -4 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-4+24|=10$$



Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól obu trójkątów i wynosi 16.

Przykład 3.

Na prostej k o równaniu $x - 3y + 15 = 0$ wyznaczymy punkt C tak, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-2, -3)$ i $B(4, 2)$, było równe 23,5 (zobacz rysunek poniżej).



Równanie $x - 3y + 15 = 0$ prostej k sprowadzamy do postaci kierunkowej

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

Współrzędne punktu C możemy zapisać w postaci

$$\left(x_C, \frac{1}{3}x_C + 5\right)$$

Następnie obliczamy współrzędne dwóch wektorów o wspólnym początku, na przykład, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Mamy:

$$\overrightarrow{AB} = [6, 5] \text{ oraz}$$

$$\overrightarrow{AC} = \left[x_C + 2, \frac{1}{3}x_C + 8\right]$$

Stosujemy wzór na pole trójkąta.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_C + 2 & \frac{1}{3}x_C + 8 \\ 6 & 5 \end{matrix}\right\|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|5(x_C + 2) - 6\left(\frac{1}{3}x_C + 8\right)\right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|3x_C - 38|$$

Pole trójkąta ABC jest równe 23,5, więc

$|3x_C - 38| = 47$, stąd

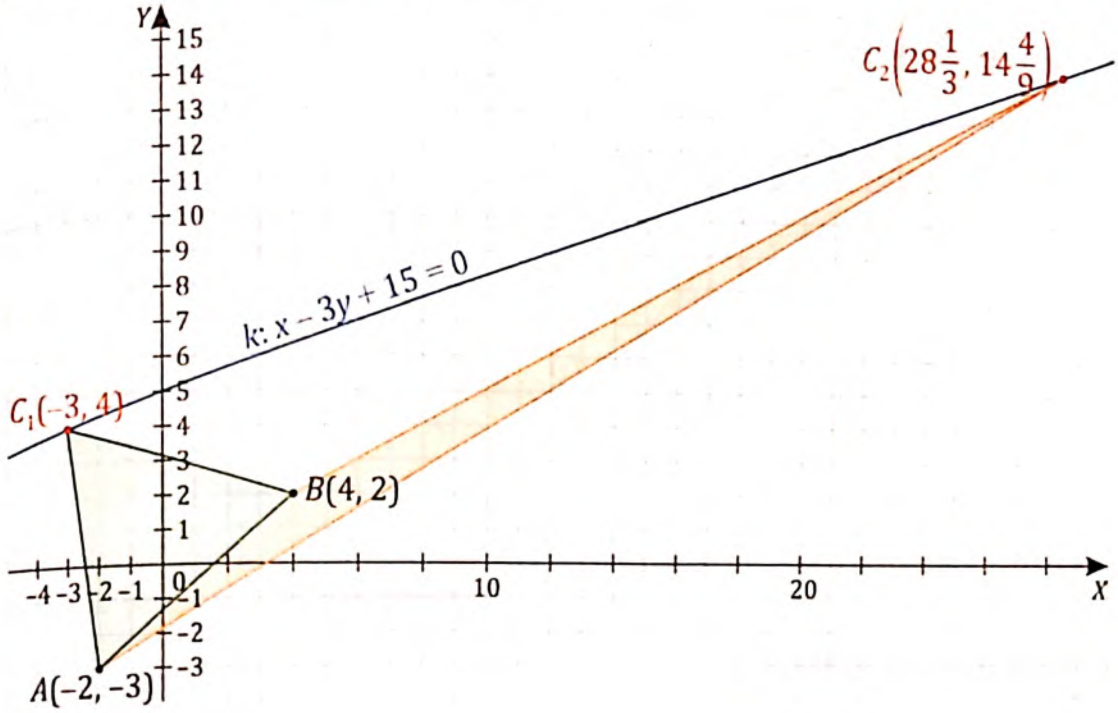
$3x_C - 38 = -47 \vee 3x_C - 38 = 47$

$x_C = -3 \vee x_C = 28\frac{1}{3}$

Jeśli $x_C = -3$, to wtedy $y_C = \frac{1}{3}(-3) + 5 = 4$.

Jeśli $x_C = 28\frac{1}{3}$, to otrzymujemy $y_C = \frac{1}{3} \cdot 28\frac{1}{3} + 5 = 14\frac{4}{9}$.

Otrzymaliśmy dwa punkty spełniające warunki zadania: $C_1(-3, 4)$, $C_2\left(28\frac{1}{3}, 14\frac{4}{9}\right)$. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach: $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = -x + 6$ oraz $y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$. Wyznacz:
   a) współrzędne wierzchołków trójkąta
   b) cosinusy miar kątów wewnętrznych trójkąta
   c) obwód trójkąta
   d) pole trójkąta ABC.
2. Oblicz pole pięciokąta $ABCDE$, jeśli $A(2, -5)$, $B(6, -4)$, $C(8, 2)$, $D(1, 6)$, $E(-6, 2)$.
3. W rombie $ABCD$, którego pole wynosi 48, dane są przeciwległe wierzchołki $A(1, -5)$ i $C(-5, 1)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków.
4. W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle ABC| = 90°$) dwa wierzchołki mają współrzędne $A(4, -2)$ i $C(0, 8)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B, wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 20.