Kombinacje

Przykład 1.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców trzeba wybrać dwuosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić?

Zastanówmy się najpierw, czy kolejność wybieranych osób jest istotna. Oczywiście nie. Ważny jest tylko skład delegacji (czyli to, które osoby zostały wybrane), a nie kolejność wybierania. Zatem do opisu wyboru delegacji wygodnie jest użyć pojęcia podzbiorów (a nie ciągów). Możemy powiedzieć, że dwuosobową delegację można wybrać na tyle sposobów, ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru złożonego z 5 elementów.
Wprowadźmy oznaczenia:

X_1, X_2, X_3 – dziewczynki

Y_1, Y_2 – chłopcy

Wypiszemy wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$:

$\{X_1, X_2\}$ $\{X_1, X_3\}$ $\{X_1, Y_1\}$ $\{X_1, Y_2\}$

$\{X_2, X_3\}$ $\{X_2, Y_1\}$ $\{X_2, Y_2\}$

$\{X_3, Y_1\}$ $\{X_3, Y_2\}$

$\{Y_1, Y_2\}$

Dwuosobową delegację można wybrać na 10 sposobów.

Zaznaczmy to wyraźnie: kolejność wypisywania elementów zbioru (podzbioru) nie jest istotna. Mamy więc na przykład:

$\{X_1, X_2\} = \{X_2, X_1\}$

Zbiory (podzbiory) nie są równe, jeśli różnią się co najmniej jednym elementem, na przykład

$\{X_1, X_2\} \neq \{X_1, X_3\}$ $\{X_1, X_2\} \neq \{Y_1, Y_2\}$

Definicja 1.

Kombinacją *k*-elementową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru *A*, gdzie $k, n \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A (przy czym elementy zbioru A nie mogą się powtarzać).

Definicja 2.

Liczbę k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, oznaczamy symbolem $\binom{n}{k}$ i czytamy „n po k".

Z przykładu 1. wiemy, że $\binom{5}{2} = 10$.

Wyznaczanie liczby podzbiorów dowolnego zbioru ułatwia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, gdzie $k, n \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$

Przykład 2.

Korzystając z twierdzenia 1., obliczamy:

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

b) $\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)! \cdot 7!} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = \frac{7!}{1 \cdot 7!} = 1$

c) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

d) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Przykład 3.

Ile różnych prostych wyznacza 100 punktów, jeśli dowolne trzy z nich nie są współliniowe?

Każdą prostą wyznaczają 2 punkty, przy czym kolejność ich wyboru oczywiście nie jest ważna. Wszystkich prostych jest zatem tyle, ile dwuelementowych podzbiorów zbioru 100-elementowego. Mamy więc:

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{(100-2)! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

Sto punktów wyznacza 4950 prostych.

Przykład 4.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców trzeba wybrać dwuosobową delegację, w której ma być co najmniej jedna dziewczynka. Na ile sposobów można to zrobić?

Łatwo jest odpowiedzieć na postawione pytanie. W przykładzie 1. wypisaliśmy wszystkie możliwe składy delegacji. Jest ich 10. Tylko w jednej delegacji nie ma ani jednej dziewczynki. Zatem delegacji, w których jest co najmniej jedna dziewczynka, można utworzyć 9.

Zapiszemy teraz rozwiązanie tego zadania z wykorzystaniem symboli kombinatorycznych. Taki sposób będzie przydatny w przypadkach, gdy nie będzie możliwości wypisania wszystkich rozwiązań (ze względu na ich zbyt wielką liczbę).

Zauważ, że przy wyborze delegacji (spełniającej warunki zadania) możliwe są dwa rozłączne przypadki:
- w delegacji jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec
- w delegacji są dwie dziewczynki.

Obliczamy, ile jest możliwości utworzenia delegacji w każdym przypadku.

- Jedną dziewczynkę z trzech można wybrać na $\binom{3}{1}$, czyli 3 sposoby. Do każdej tak wybranej dziewczynki możemy wybrać chłopca na $\binom{2}{1}$, czyli 2 sposoby.

  Zatem – zgodnie z regułą mnożenia – delegacji, w których jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec, jest

  $$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}$$

- Dwie dziewczynki z trzech można wybrać na $\binom{3}{2}$, czyli 3 sposoby.

Możliwości utworzenia delegacji, w których jest co najmniej jedna dziewczynka – zgodnie z regułą dodawania – jest

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}+\binom{3}{2}=6+3=9$$

W rozwiązaniu takiego zadania trzeba uważać, by nie popełnić następującego <u>błędu</u>:

„Ponieważ w delegacji ma być co najmniej jedna dziewczynka, więc najpierw z trzech dziewczynek wybieramy jedną na $\binom{3}{1}$, czyli 3 sposoby. Z pozostałych czterech osób (dwóch dziewczynek i dwóch chłopców) wybieramy jedną na $\binom{4}{1}$, czyli 4 sposoby. Zatem możliwości utworzenia delegacji, w której jest co najmniej jedna dziewczynka, jest $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$."

To, że rozwiązanie jest błędne, można stwierdzić natychmiast, bowiem

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}=3\cdot 4=12$$

Poprawną odpowiedzią jest liczba 9. Na czym jednak polega błąd? Otóż w iloczynie $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ trzy delegacje są liczone podwójnie. Jeśli na przykład w pierwszym etapie wybierzemy dziewczynkę X_1, a w drugim – dziewczynkę X_2, to otrzymamy delegację

$\{X_1, X_2\}$

Jeśli natomiast w pierwszym etapie wybierzemy dziewczynkę X_2, a w drugim – dziewczynkę X_1, to otrzymamy delegację

$\{X_2, X_1\}$

W iloczynie $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ delegacja $\{X_1, X_2\}$ jest więc liczona podwójnie (raz jako $\{X_1, X_2\}$, a raz jako $\{X_2, X_1\}$). Podobnie delegacje $\{X_1, X_3\}$ i $\{X_2, X_3\}$ są liczone podwójnie i dlatego otrzymany wynik jest o 3 większy od rozwiązania prawidłowego.

Przykład 5.

W pudełku jest 100 losów, w tym 9 wygrywających. Na ile sposobów można wyciągnąć trzy losy, tak aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające?

Możliwe są dwa rozłączne przypadki:
- wyciągniemy trzy losy, wśród których tylko dwa są wygrywające
- wyciągniemy trzy losy wygrywające.

Obliczamy:

- Dwa losy wygrywające możemy wyciągnąć na $\binom{9}{2}$ sposobów, jeden los pusty możemy wyciągnąć na $\binom{91}{1}$ sposobów, zatem trzy losy, wśród których tylko dwa są wygrywające, możemy wyciągnąć na

  $\binom{9}{2}\cdot\binom{91}{1}$ sposobów.

- Trzy losy wygrywające możemy wyciągnąć na $\binom{9}{3}$ sposobów.

Możliwości wyciągnięcia trzech losów tak, aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające, jest

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{91}{1}+\binom{9}{3} \quad (= 36\cdot 91 + 84 = 3276 + 84 = 3360)$$

Ostatni przykład dotyczyć będzie rozkładu kart w grze w brydża. Talia do gry w brydża składa się 52 kart w czterech kolorach. Kolory to: piki (♠), kiery (♥), kara (♦) i trefle (♣). W każdym kolorze jest 13 kart (od dwójki do dziesiątki oraz walet, dama, król i as).

Przykład 6.

Każdemu z czterech graczy należy przydzielić 13 kart z talii 52-kartowej. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby gracz A otrzymał 2 piki, gracz B – 6 pików, gracz C – 4 piki, gracz D – 1 pik?

Graczowi A należy przydzielić 2 piki (z 13) i 11 kart (z 39), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{39}{11} \text{ sposobów.}$$

Graczowi B należy przydzielić 6 pików (z pozostałych 11) i 7 kart (z pozostałych 28), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{11}{6}\cdot\binom{28}{7} \text{ sposobów.}$$

Graczowi C należy przydzielić 4 piki (z pozostałych 5) i 9 kart (z pozostałych 21), które pikami nie są. Można to zrobić na

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{21}{9} \text{ sposobów.}$$

Graczowi D należy przydzielić pozostałe 13 kart. Można to zrobić na 1 sposób. Ostatecznie, wszystkich możliwych sposobów rozdania kart, tak aby były spełnione warunki zadania, jest

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{39}{11}\cdot\binom{11}{6}\cdot\binom{28}{7}\cdot\binom{5}{4}\cdot\binom{21}{9}$$

Liczba ta jest większa niż 10^{26}.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

   a) $\binom{6}{3}$ b) $2\cdot\binom{7}{5}$ c) $\binom{8}{2}-\binom{5}{3}$ d) $\binom{10}{9}\cdot\binom{9}{0}$

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k takich, że $n \geqslant k$:

   a) $\binom{n}{0}=1$ b) $\binom{n}{1}=n$ c) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ d) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

3. Na płaszczyźnie danych jest 7 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe.
   a) Ile różnych odcinków można otrzymać, których końcami są te punkty?
   b) Ile można otrzymać różnych trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?