4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Reguła mnożenia i reguła dodawania

Kombinatoryka, mówiąc bardzo ogólnie, zajmuje się ustalaniem liczebności zbiorów skończonych. Mając zadanie dotyczące liczebności, tworzymy odpowiedni model matematyczny, który sprowadza rozpatrywane zadanie do wyznaczenia liczby elementów pewnego zbioru skończonego.

Przykład 1.

W grupie są 3 dziewczynki i 5 chłopców. Z tej grupy trzeba wybrać delegację złożoną z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Ile jest możliwości dokonania wyboru takiej delegacji?

Wprowadźmy oznaczenia:
X_1, X_2, X_3 – dziewczynki
Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 – chłopcy

I sposób
Liczba możliwości dokonania wyboru delegacji jest oczywiście równa liczbie par składających się z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Aby ustalić tę liczbę, można posłużyć się tabelą:

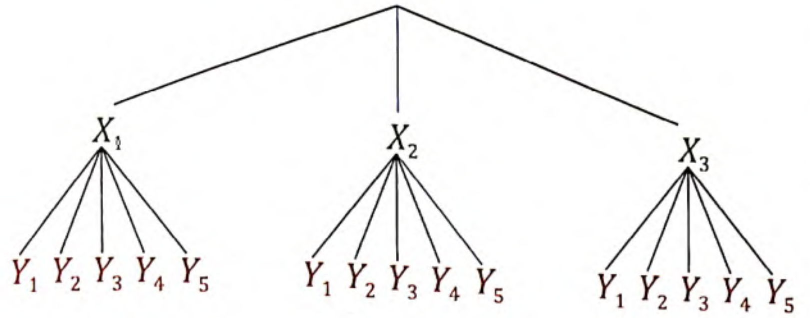
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	(X_1, Y_1)	(X_1, Y_2)	(X_1, Y_3)	(X_1, Y_4)	(X_1, Y_5)
X_2	(X_2, Y_1)	(X_2, Y_2)	(X_2, Y_3)	(X_2, Y_4)	(X_2, Y_5)
X_3	(X_3, Y_1)	(X_3, Y_2)	(X_3, Y_3)	(X_3, Y_4)	(X_3, Y_5)

Liczba par jest równa liczbie komórek w części tabeli zaznaczonej grubą linią, czyli

$$3 \cdot 5 \quad (= 15)$$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

II sposób
Aby rozwiązać to zadanie, można posłużyć się diagramem, który nazywa się **drzewem**. Zauważ, że wybór pary spełniającej warunki zadania może przebiegać w dwóch etapach: pierwszym etapem może być wybór dziewczynki, drugim – wybór chłopca (oczywiście kolejność może być też odwrotna). Na drzewie te etapy przedstawiamy tak:



Odcinki na tym diagramie nazywamy krawędziami, które spotykają się w punktach zwanych węzłami. Każdy ciąg krawędzi od pierwszego do ostatniego etapu nazywamy gałęzią. Tak więc gałąź składa się z tylu krawędzi, ile etapów przedstawia drzewo.

Gałąź zaznaczona kolorem niebieskim odpowiada parze (X_2, Y_5).

Każda dziewczynka może być w parze z jednym z 5 chłopców, może więc utworzyć 5 par. W klasie są 3 dziewczynki, zatem wszystkich par jest

$$3 \cdot 5$$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

Załóżmy, że dokonywany przez nas wybór przebiega w dwóch etapach. W I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, a w II etapie – na k_2 sposobów. Wówczas liczba wszystkich wyników naszego (dwuetapowego) wyboru jest równa

$$k_1 \cdot k_2$$

Jest to tzw. reguła mnożenia. Oczywiście, można ją uogólnić na większą liczbę etapów.

Przykład 2.

Restauracja oferuje swoim gościom: 5 rodzajów zup, 10 rodzajów drugich dań i 6 rodzajów napojów. Ile różnych zestawów obiadowych złożonych z zupy, drugiego dania i napoju można zamówić w tej restauracji?

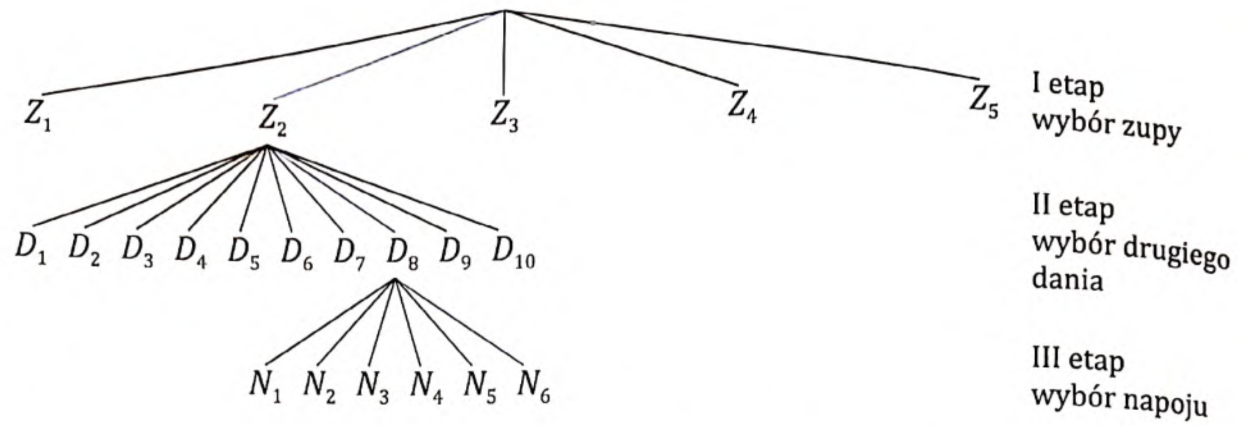
Oznaczmy:

$Z_1, ..., Z_5$ – rodzaje zup

$D_1, ..., D_{10}$ – rodzaje drugich dań

$N_1, ..., N_6$ – rodzaje napojów.

Wyboru zestawu obiadowego możemy dokonać w trzech etapach. Narysujemy częściowe drzewo przedstawiające te etapy.



Na drzewie kolorem niebieskim zaznaczono gałąź odpowiadającą zestawowi obiadowemu złożonemu z drugiej zupy, ósmego dania drugiego i szóstego napoju.

Zupę możemy wybrać na 5 sposobów. Do każdej tak wybranej zupy możemy wybrać drugie danie na 10 sposobów. Zatem możemy utworzyć $5 \cdot 10$ zestawów złożonych z zupy i drugiego dania. Do każdego z 50 takich zestawów możemy wybrać napój na 6 sposobów. W restauracji można więc zamówić

$$5 \cdot 10 \cdot 6 \text{ (czyli 300)}$$

różnych zestawów obiadowych.

Ogólnie możemy stwierdzić, że jeśli dokonywany przez nas wybór przebiega w trzech etapach i w I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, w II etapie – na k_2 sposobów, a w III etapie – na k_3 sposobów, to liczba wszystkich wyników naszego (trójetapowego) wyboru jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$.

Przykład 3.

Ania spośród sześciu różnych bluzek – 4 niebieskich i 2 zielonych – ma wybrać jedną oraz spośród trzech różnych spódnic – 2 niebieskich i 1 zielonej – też ma wybrać jedną.

a) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy?
b) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?

Ad a) Ania do każdej z 6 bluzek może wybrać jedną z 3 spódnic, zatem wszystkich możliwości wyboru jest

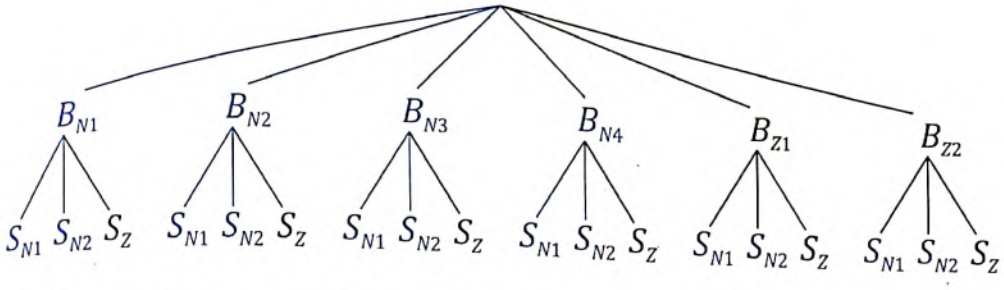
$$6 \cdot 3$$

Ania ma 18 możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy.

Ad b) Narysujemy drzewo ilustrujące wybór bluzki i spódnicy. Oznaczymy:

$B_{N1}, B_{N4}, B_{N4}, B_{N4}$ – bluzki niebieskie $\quad$ B_{Z1}, B_{Z2} – bluzki zielone

S_{N1}, S_{N2} – spódnice niebieskie $\quad$ S_Z – spódnica zielona



Zbiór wyników wyboru bluzki i spódnicy w tym samym kolorze można podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

- wybrana bluzka i spódnica są niebieskie
- wybrana bluzka i spódnica są zielone.

Taki podział ułatwia obliczenia. Mamy bowiem:

- Do każdej z 4 niebieskich bluzek Ania może dobrać jedną z 2 niebieskich spódnic. Zatem zestawów: niebieska bluzka i niebieska spódnica jest

  $4 \cdot 2$ (czyli 8)

- Do każdej z 2 zielonych bluzek Ania może dobrać tylko 1 zieloną spódnicę. Zatem liczba zestawów: zielona bluzka i zielona spódnica jest równa

  $2 \cdot 1$ (czyli 2)

Ania ma 10 ($= 8 + 2$) możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by były one w tym samym kolorze.

W punkcie b) ostatniego przykładu posłużyliśmy się – intuicyjnie oczywistą – regułą dodawania. Reguła ta stwierdza, że jeśli zbiór wszystkich wyników podzielimy na dwa rozłączne (czyli niemające wspólnych elementów) podzbiory i w pierwszym podzbiorze jest m_1 wyników oraz w drugim podzbiorze jest m_2 wyników, to wszystkich wyników jest $m_1 + m_2$.
Regułę dodawania można uogólnić na większą niż dwa liczbę podzbiorów. Należy wówczas założyć, że dowolne dwa podzbiory są rozłączne.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Proste k i l są równoległe. Na prostej k zaznaczono 4 różne punkty, a na prostej l – 5 różnych punktów. Ile różnych odcinków wyznaczają te punkty, jeśli jeden koniec każdego odcinka należy do prostej k, a drugi do prostej l?
2. Pewna dama ma 5 kapeluszy i 8 apaszek. Na ile różnych sposobów może włożyć kapelusz wraz z apaszką?
3. W szufladzie znajdują się różne czapki i szaliki: 3 czapki białe, 4 czapki czerwone i 2 czapki szare oraz 2 szaliki białe, 1 szalik czarny i 5 szalików szarych. Na ile różnych sposobów można wybrać:
   a) jedną czapkę i jeden szalik
   b) czapkę czerwoną i jeden dowolny szalik
   c) czapkę i szalik w kolorze białym
   d) czapkę i szalik w jednym kolorze?