Wariacje

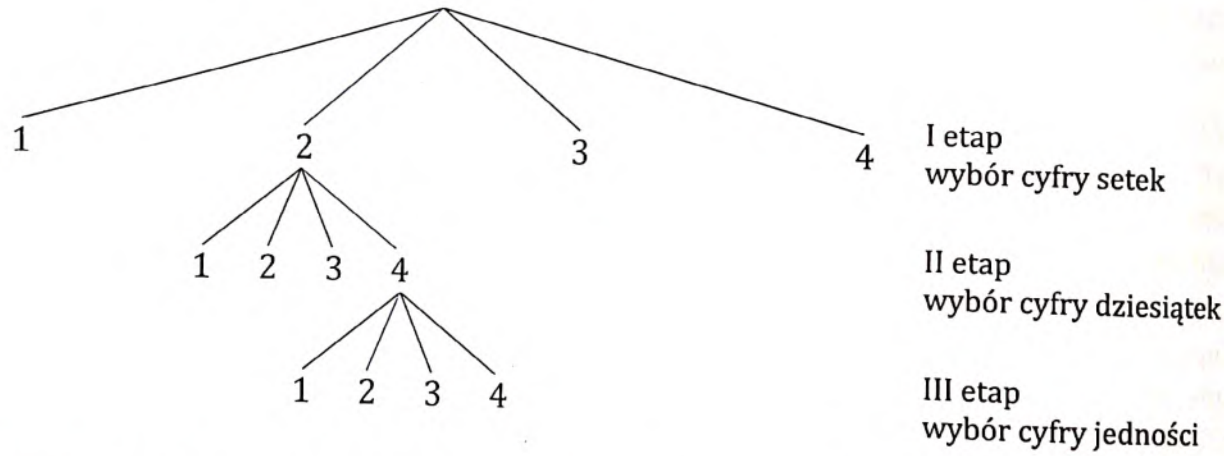
W poprzednim temacie wyznaczaliśmy w różnych sytuacjach liczbę wieloetapowych wyborów. Zauważ, że we wszystkich przykładach wybór dokonywany na każdym etapie dotyczył innego zbioru, na przykład w przykładzie 1. etap pierwszy dotyczył wyboru dziewczynki, a drugi – wyboru chłopca.

Teraz zajmiemy się wyborami wieloetapowymi, ale na każdym etapie wybór będzie dokonywany z tego samego zbioru.

Przykład 1.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Aby utworzyć liczbę trzycyfrową, wystarczy wskazać cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności. Częściowe drzewo przedstawione poniżej pokazuje etapy tworzenia liczby trzycyfrowej.



Kolorem niebieskim zaznaczona została gałąź odpowiadająca liczbie 242.

Cyfrę setek możemy wybrać na 4 sposoby. Do każdej tak wybranej cyfry setek cyfrę dziesiątek możemy wybrać również na 4 sposoby. Do każdej z 16 $(= 4 \cdot 4)$ tak utworzonych par możemy dobrać cyfrę jedności na 4 sposoby. Ostatecznie – zgodnie z regułą mnożenia – wszystkich liczb trzycyfrowych jest

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \text{ (czyli } 4^3)$$

Można utworzyć 64 liczby trzycyfrowe.

Zwróć uwagę, że rozważając wybory wieloetapowe, możemy mówić o pewnych przyporządkowaniach. Odnosząc się do ostatniego przykładu, możemy na przykład rozpatrzyć przyporządkowanie (odpowiadające utworzeniu liczby 242):

I etap $\to$ 2

II etap $\to$ 4   co można też zapisać tak   1. $\to$ 2

III etap $\to$ 2   2. $\to$ 4

3. $\to$ 2

Takie przyporządkowania, w którym kolejnym początkowym liczbom naturalnym (większym od 0) przypisuje się elementy z danego zbioru, nazywamy ciągami. Pojęcie ciągu poznałeś w klasie drugiej.
Można więc powiedzieć (odnosząc się do ostatniego przykładu), że liczb trzycyfrowych jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

Zauważ też, że w rozpatrywanym przykładzie:
- kolejność wybieranych (przyporządkowywanych) cyfr jest istotna (np. wybór najpierw 2, następnie 4 i na końcu znowu 2 da w efekcie liczbę 242, jeśli natomiast najpierw wybierzemy 4, a potem dwa razy 2, to otrzymamy inny wynik - liczbę 422)
- cyfry, z których tworzymy liczbę, mogą (ale nie muszą!) się powtarzać.

Przykład 2.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$?

Zadanie na pierwszy rzut oka wydaje się takie samo jak zadanie z poprzedniego przykładu. Kolejność wybieranych cyfr jest istotna oraz cyfry mogą się powtarzać. Różnica polega na tym, że cyfra setek nie może być równa 0. Można więc powiedzieć, że liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ i pierwszym wyrazie różnym od 0.
Cyfrę setek możemy więc wybrać na 3 sposoby, cyfrę dziesiątek na 4 sposoby i cyfrę jedności na 4 sposoby. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest więc

$3 \cdot 4 \cdot 4$

Można utworzyć 48 liczb trzycyfrowych.

Przykład 3.

Ile napisów czteroliterowych można utworzyć, dysponując literami należącymi do zbioru $\{A, B, C\}$?

Kolejność wybieranych liter jest istotna (np. napisy ABBA i BABA są różne) i litery mogą się powtarzać.
Wszystkich napisów czteroliterowych jest

3^4 (czyli 81)

(Uzasadnij to dokładnie).

Przykład 4.

Pięciu pasażerów, których oznaczymy literami A, B, C, D, E, wsiada do pociągu, wybierając losowo jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów pasażerowie ci mogą zająć miejsca w wagonach tego pociągu?

Każdemu pasażerowi można przyporządkować numer wagonu, do którego wsiadł. Jeśli pasażer A wsiadł do wagonu 2., pasażerowie B i C do wagonu 3., pasażer D do wagonu 4., a pasażer E do wagonu 6., to sytuację taką można opisać ciągiem

$$(2, 3, 3, 4, 6)$$

Zatem liczba sposobów, w jakie pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach pociągu, jest równa liczbie pięciowyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

Pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach na 6^5 sposobów.

Rozpatrywane przykłady prowadzą do następującej definicji.

> ### Definicja 1.
> **Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami n-elementowego zbioru A**, gdzie $k, n \in N_+$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów zbioru A.

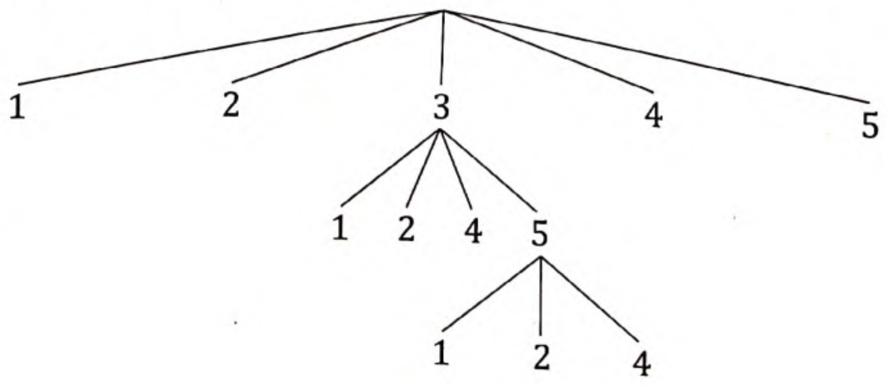
Łatwo zauważyć, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

> ### Twierdzenie 1.
> Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa n^k.

Przykład 5.

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Naszkicujemy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczby trzycyfrowej o różnych cyfrach.



I etap
wybór cyfry setek

II etap
wybór cyfry dziesiątek

III etap
wybór cyfry jedności

Kolejność wybieranych cyfr oczywiście jest istotna, ale cyfry nie mogą się powtarzać. Cyfrę setek możemy wybrać na 5 sposobów, cyfrę dziesiątek – na 4 sposoby (jeśli jako cyfrę setek wybraliśmy 3, to cyfrę dziesiątek możemy wybrać spośród cyfr: 1, 2, 4, 5), a cyfrę jedności możemy wybrać już tylko na 3 sposoby (pomijamy wybraną cyfrę setek i cyfrę dziesiątek). Zgodnie z regułą mnożenia wszystkich takich liczb trzycyfrowych jest więc

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

Przykład 6.

Pięciu pasażerów, których oznaczymy literami A, B, C, D, E, wsiada do pociągu, wybierając losowo jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów pasażerowie ci mogą zająć miejsca w wagonach tego pociągu, jeśli wiadomo, że każdy z pasażerów wybrał inny wagon?

Liczba sposobów, w jakie pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach pociągu, jest równa liczbie pięciowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach na 720 sposobów.

Definicja 2.

Wariacją *k*-wyrazową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru *A*, gdzie k, $n \in N_+$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Na górę z jednej miejscowości prowadzą trzy różne szlaki. Na ile sposobów turyści mogą wybrać trasę wycieczki na górę i z powrotem?
2. Budynek ma parter i 10 pięter. Na parterze tego wieżowca do windy wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą wysiąść z windy (nie uwzględniamy kolejności wysiadania), jeśli:
   a) każda osoba może wysiąść na dowolnym piętrze
   b) wiadomo, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze
   c) wiadomo, że wszystkie osoby wysiądą na tym samym piętrze?